DEC 1 6 1932

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

D 13

Band 166

Heft 2

Ausgegeben den 10. Dezember 1931

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1931

Band 166. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Remak, Robert, Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktoren	65
Maier, W., Theorie der *s*-Funktion	101
Netanjahu Mileikowsky, E., Elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung . . .	116
Mahler, Kurt, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I	118

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktoren.

Von *Robert Remak* in Berlin.

Das Ziel mehrerer vorangehender Arbeiten [1]) war es, die Möglichkeit der Darstellung einer endlichen Gruppe als Untergruppe eines direkten Produktes zu untersuchen. Die Gestalt der Untergruppen direkter Produkte, abgekürzt der subdirekten Produkte, war nur für 2 Faktoren untersucht worden; ein subdirektes Produkt zweier Faktoren war stets ein meromorphes Produkt; zwischen den beiden Komponenten besteht ein Isomorphismus zwischen Faktorgruppen (Meromorphismus), und die Untergruppe des direkten Produktes erhält man durch direkte Multiplikation lediglich je zweier durch den Isomorphismus einander zugeordneter Komplexe der beiden Faktorgruppen. Für 3 und mehr Faktoren ließen sich ebenfalls meromorphe Produkte bilden; diese waren aber sehr spezielle Fälle des allgemeinsten subdirekten Produktes.

Der § 1 der Arbeit DUDP bildet auch den Anfang der Untersuchungen dieser Arbeit, deren Aufgabe es ist, die Konstitution eines subdirekten Produktes dreier Faktoren darzustellen. Von der Unzerlegbarkeit der Faktoren wird in dieser Arbeit keine Rede sein, und die vorangehenden Arbeiten werden mit Ausnahme von DUDP § 1 nicht benutzt. § 1 der gegenwärtigen Arbeit enthält Sätze über Untergruppen und invariante Untergruppen eines subdirekten (also meromorphen) Produktes zweier Faktoren. § 2 behandelt die subdirekten Produkte dreier Faktoren. Die in DUDP § 1 behandelte geometrische Darstellung ist für alle Sätze dieser Arbeit anwendbar. Es erleichtert das Verständnis, sich alle Herleitungen dieser Arbeit eben bzw. räumlich vorzustellen. Ich muß aber die Bildung der zugehörigen geometrischen Vorstellungen dem Leser überlassen, da deren ausführliche Erörterung den Umfang der Arbeit zu sehr vergrößern würde. Der erste Teil des § 2 überträgt einfach die in § 1 gewonnenen Sätze auf die zweidimensionalen Komponenten des subdirekten Produktes dreier Faktoren; die geometrischen Darstellungen sind also zweidimensional; dann folgen Sätze mit dreidimensionaler geometrischer Darstellung. Lediglich in § 3 folgen einige Sätze, zu denen DUDP § 2 herangezogen wird.

Die Numerierung erfolgt in § 1 für die einzelnen Lehrsätze, in §§ 2 und 3 läuft sie durch. Formeln, die als Ergebnis an sich von Interesse sind, sind in §§ 2 und 3 durch Fettdruck der Nummer hervorgehoben; diese werden jedoch im Text ohne Fettdruck zitiert.

§ 1.

Hilfssatz 1: *Es sei* $\mathfrak{G} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} <_i \mathfrak{A}$; *dann ist*

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) <_i \mathfrak{G},$$

$$\frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}} \sim \frac{\mathfrak{G}}{(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})}.$$

[1]) R. Remak (sämtlich im Journ. f. Math.): „Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen", Bd. **162** (1930), S. 1—16, zitiert MIU; „Über die Darstellung der endlichen

Beweis: Es sei $G < \mathfrak{G}$. Es ist, da $\mathfrak{B} <_i \mathfrak{A}$, $G < \mathfrak{A}$ ist,

$$G \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G^{-1} < G\,\mathfrak{B}\,G^{-1} = \mathfrak{B},$$

ferner

$$G \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G^{-1} < \mathfrak{G},$$

mithin

$$G \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G^{-1} < (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}),$$

also wegen der Gleichheit der Ordnungen

$$G \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G^{-1} = (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}),$$
$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) <_i \mathfrak{G}.$$

Es seien

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots, n)$$

die verschiedenen Komplexe der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})}$. Es soll gezeigt werden, daß verschiedene dieser Komplexe durch Multiplikation mit $\mathfrak{B}$ in voneinander verschiedene Komplexe der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ übergehen. Angenommen, das wäre nicht der Fall, so wäre einerseits

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G_\nu \neq (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G_\mu,$$

andrerseits

$$\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G_\nu = \mathfrak{B} \cdot G_\nu = \mathfrak{B} \cdot G_\mu.$$

Hieraus würde folgen

$$\mathfrak{B} \cdot G_\nu G_\mu^{-1} = \mathfrak{B}; \qquad G_\nu G_\mu^{-1} < \mathfrak{B}.$$

Da aber auch

$$G_\nu G_\mu^{-1} < \mathfrak{G},$$

so wäre

$$G_\nu G_\mu^{-1} < (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}),$$

also

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G_\nu G_\mu^{-1} = (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}),$$
$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G_\nu = (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \cdot G_\mu,$$

was der Voraussetzung widerspricht, daß diese beiden Komplexe voneinander verschieden sein sollen. Mithin liefern die verschiedenen Komplexe von $\frac{\mathfrak{G}}{(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})}$ nach Multiplikation mit $\mathfrak{B}$ voneinander verschiedene Komplexe der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$. Die Gesamtheit dieser Komplexe liefern die Elemente von $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{B}$ mit allen Elementen, also auch mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{A}$ vertauschbar; es ist

$$(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}) \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}) = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}.$$

Mithin ist $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}$ eine Gruppe. Jeder Komplex der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}}$ enthält genau einen Komplex der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})}$. Wir wollen sagen, die erste Faktorgruppe „schließt

---

Gruppen als Untergruppen direkter Produkte", Bd. **163** (1930), S. 1—44, zitiert DUDP; „Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen", Bd. **164** (1931), S. 197—242, zitiert ElUSD.

die zweite ein", wenn die Komplexe der beiden Faktorgruppen sich eineindeutig einander so zuordnen lassen, daß jeder Komplex der zweiten Faktorgruppe im zugeordneten Komplex der ersten Faktorgruppe enthalten ist.

Die einschließende und die eingeschlossene Faktorgruppe müssen einander isomorph sein. Wenn nämlich

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})\, G_1 \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{G})\, G_2 = (\mathfrak{B}, \mathfrak{G})\, G_3 ,$$

so erhält man durch Multiplikation mit $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B}\, G_1 \cdot \mathfrak{B}\, G_2 = \mathfrak{B}\, G_3 ,$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{G}}{(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})} \sim \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}} .$$

Wir wollen schreiben

$$\frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}} \gtrsim \frac{\mathfrak{G}}{(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})} .$$

Hierunter soll die eineindeutige isomorphe Zuordnung verstanden werden, bei der jeder Komplex der linken Faktorgruppe dem in ihm enthaltenen Komplex der rechten Faktorgruppe zugeordnet wird. Wir wollen auch umgekehrt schreiben

$$\frac{\mathfrak{G}}{(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})} \lesssim \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}} ,$$

wobei jeder Komplex der ersten Faktorgruppe im zugeordneten der zweiten Faktorgruppe enthalten ist.

Satz I: *Es sei*

$$\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 ,$$

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\mathrm{I}}{\times} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} , \qquad \overline{\mathfrak{G}} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\mathrm{II}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} ,$$

worin die Zeichen $\underset{\mathrm{I}}{\times}$ *und* $\underset{\mathrm{II}}{\times}$ *zur Unterscheidung der Isomorphismen dienen. Dann ist*

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 < \mathfrak{B}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{B}}_2 < \mathfrak{B}_2 ,$$

und es ist, wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \underset{\mathrm{II}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

auch

$$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \underset{\mathrm{I}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Beweis: Jedes Element von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist Element von $\mathfrak{G}$, also ist jede Komponente eines Elementes von $\overline{\mathfrak{G}}$ Komponente eines Elementes von $\mathfrak{G}$, mithin

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 < \mathfrak{B}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{B}}_2 < \mathfrak{B}_2 .$$

Wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \underset{\mathrm{II}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

so ist

$$\overline{B}_1 \times \overline{B}_2 < \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G} ,$$

also ist auch

$$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \underset{\mathrm{I}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Satz Ia: Umkehrung von Satz I: *Wenn*

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 < \mathfrak{B}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{B}}_2 < \mathfrak{B}_2$$

und zwischen zwei Isomorphismen

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\mathrm{I}}{\sim} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \qquad \textit{und} \qquad \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \overset{\mathrm{II}}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}$$

die Beziehungen bestehen, daß wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \overset{\mathrm{II}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

auch

$$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \overset{\mathrm{I}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 ,$$

so ist, wenn man

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\mathrm{I}}{\times} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \qquad \textit{und} \qquad \overline{\mathfrak{G}} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \overset{\mathrm{II}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}$$

bildet,

$$\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G} .$$

Beweis: Wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \overset{\mathrm{II}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

so ist

$$\overline{B}_1 \times \overline{B}_2 < \overline{\mathfrak{G}} ;$$

wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \overset{\mathrm{I}}{\sim} \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 ,$$

so ist

$$\overline{B}_1 \times \overline{B}_2 < \mathfrak{G} .$$

Die Voraussetzung besagt also, daß jedes Element von $\overline{\mathfrak{G}}$ auch Element von $\mathfrak{G}$ ist, mithin ist $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$, was zu beweisen war.

Satz II: *Unter den Voraussetzungen des Satzes I a ist*

(1) $$\overline{\mathfrak{C}}_1 < \mathfrak{C}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{C}}_2 < \mathfrak{C}_2 ;$$

(2) $$\frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \overset{\mathrm{II}}{\sim} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} ;$$

(3) $$\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1} \gtrsim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)} \overset{\mathrm{II}}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)} \lesssim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2 \cdot \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_2} ;$$

(4) $$\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\mathrm{I}}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2 \cdot \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_2} ;$$

(5) $$(\overline{\mathfrak{G}} , \ \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \overset{\mathrm{II}}{\times} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} \quad [= \overline{\mathfrak{N}}]$$
$$= \left(\overline{\mathfrak{G}} , \ (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) \times (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)\right) \quad [= (\overline{\mathfrak{G}} , \mathfrak{U})] ;$$

(6) $$\overline{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\mathrm{I}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2 \cdot \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_2} \quad [= \mathfrak{P}] ;$$

(7) (a) $$\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\mathrm{II}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)} \quad [= \mathfrak{Q}_1] ;$$

(b) $$\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)} \overset{\mathrm{II}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2 \cdot \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_2} \quad [= \mathfrak{Q}_2] ;$$

$$(8) \qquad (\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1 \ , \ \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)} \underset{\overline{\Pi}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)} \quad [= \mathfrak{R}] \ ;$$

$$(9) \qquad (\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1 \ , \ \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_2) = \overline{\mathfrak{G}} \cdot \big((\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) \times (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) \big) \quad [= \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}] \ .$$

Vorbemerkung: Aus den Voraussetzungen des Satzes I a folgen diejenigen des Satzes I und umgekehrt. Wir hätten also auch die Voraussetzungen des Satzes I machen können.

Die Behauptungen (1) bis (4) sind Behauptungen über Komponentengruppen, mögen daher auch aus den Voraussetzungen des Satzes I a hergeleitet werden, die von Komponentengruppen handeln. Die zu beweisenden Behauptungen (1) bis (4) ergeben sich als *notwendige* Bedingungen dafür, daß

$$\overline{\mathfrak{G}} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\overline{\Pi}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} < \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\Upsilon}{\times} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \ .$$

Beweis des Satzes II: Es sei $\overline{C}_1 < \overline{\mathfrak{C}}_1$.

Es ist

$$\overline{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 = \overline{\mathfrak{C}}_1 \ \overline{\Pi} \ E \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 = \overline{\mathfrak{C}}_2 \ ;$$

also ist nach der Voraussetzung auch

$$\overline{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \ \Upsilon \ E \cdot \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_2 \ .$$

Da

$$\mathfrak{C}_1 = E \cdot \mathfrak{C}_1 \ \Upsilon \ E \cdot \mathfrak{C}_2 \ ,$$

so ist

$$\overline{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1 \ ,$$

also

$$\overline{C}_1 < \mathfrak{C}_1 , \quad \overline{\mathfrak{C}}_1 < \mathfrak{C}_1 , \qquad \text{ebenso} \qquad \overline{\mathfrak{C}}_2 < \mathfrak{C}_2 \ .$$

Das ist Behauptung (1).

(Wenn man

$$\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$$

voraussetzt, so kann man auch schließen

$$(\overline{\mathfrak{G}} , \mathfrak{C}_1) = \big(\overline{\mathfrak{G}} , (\mathfrak{G} , \mathfrak{A}_1) \big) = (\overline{\mathfrak{G}} , \mathfrak{G} , \mathfrak{A}_1) = (\overline{\mathfrak{G}} , \mathfrak{A}_1) = \overline{\mathfrak{C}}_1 \ ,$$

mithin

$$\overline{\mathfrak{C}}_1 < \mathfrak{C}_1 , \qquad \text{ebenso} \qquad \overline{\mathfrak{C}}_2 < \mathfrak{C}_2 \ . \ )$$

Es ist also auch, da $\overline{\mathfrak{C}}_1 <_i \overline{\mathfrak{B}}_1$, die Beziehung

$$\overline{\mathfrak{C}}_1 <_i (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) , \qquad \text{ebenso} \qquad \overline{\mathfrak{C}}_2 <_i (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)$$

erfüllt.

Wir gehen zum Beweise der Behauptung (2) über.

Es sei $\overline{\mathfrak{D}}_2 < \overline{\mathfrak{B}}_2$, so daß $\overline{\mathfrak{C}}_2 < \overline{\mathfrak{D}}_2$ und

$$\frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \ \overline{\Pi} \ \frac{\overline{\mathfrak{D}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} \ ;$$

dann ist nach der Voraussetzung

$$\frac{\mathfrak{C}_1 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\mathfrak{C}_1} = \frac{E \cdot \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1} \ \Upsilon \ \frac{\mathfrak{C}_2 \cdot \overline{\mathfrak{D}}_2}{\mathfrak{C}_2} \ .$$

Nun ist aber $E \cdot \mathfrak{C}_1 \curlywedge E \cdot \mathfrak{C}_2$, mithin ist

$$\mathfrak{C}_2 \cdot \overline{\mathfrak{D}}_2 = \mathfrak{C}_2 , \qquad \overline{\mathfrak{D}}_2 < \mathfrak{C}_2 , \qquad \overline{\mathfrak{D}}_2 < (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) .$$

Wenn Ord $\mathfrak{X}$ die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{X}$ bedeutet, ergibt sich

$$\operatorname{Ord} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} = \operatorname{Ord} \frac{\overline{\mathfrak{D}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} \leqq \operatorname{Ord} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Ebenso läßt sich zeigen

$$\operatorname{Ord} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} \leqq \operatorname{Ord} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} ;$$

mithin

$$\operatorname{Ord} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} = \operatorname{Ord} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} ,$$

$$\overline{\mathfrak{D}}_2 = (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) ,$$

$$\frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\Pi}{\sim} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Das ist Behauptung (2).

Da

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 < \mathfrak{B}_1 , \qquad \mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{B}_1 ,$$

so ist nach Hilfssatz I

$$(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) <_i \overline{\mathfrak{B}}_1 , \qquad \text{ebenso} \qquad (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) <_i \overline{\mathfrak{B}}_2 .$$

Man ordne nun durch den Isomorphismus $\underset{\Pi}{\sim}$ die Faktorgruppen

$$\frac{\left(\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right)}{\left(\frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right)} \underset{\Pi}{\sim} \frac{\left(\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}\right)}{\left(\frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2}\right)}$$

oder

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)} \underset{\Pi}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}$$

einander zu. (Da es sich nicht um die Komplexe nach $\overline{\mathfrak{C}}_1$ bzw. $\overline{\mathfrak{C}}_2$ handelt, sondern um größere Komplexe, ist die Bedeutung des Zeichens $\underset{\Pi}{\sim}$ hier etwas verallgemeinert.)

Geht man durch Multiplikation mit $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ zu den einschließenden Komplexen über, so erhält man nach Hilfssatz I die Behauptung (3).

Da aber die Voraussetzungen des Satzes I a erfüllt sein sollten, erhält man die Behauptung (4).

Um die Behauptung (5) zu beweisen, bezeichne man vorläufig

$$\frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\Pi}{\times} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} = \overline{\mathfrak{N}} .$$

Es ist

$$\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 , \qquad \overline{\mathfrak{N}} < \overline{\mathfrak{G}} , \qquad \text{also} \qquad \overline{\mathfrak{N}} < (\overline{\mathfrak{G}} , \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) .$$

Es ist die $\mathfrak{A}_1$-Komponente von $(\overline{\mathfrak{G}} , \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$ sowohl $< \overline{\mathfrak{B}}_1$ als auch $< \mathfrak{C}_1$, mithin $< (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)$, ebenso die $\mathfrak{A}_2$-Komponente $< (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)$. Wegen (2) umfaßt $\overline{\mathfrak{N}}$ sämtliche

Elemente $< \overline{\mathfrak{G}}$, deren Komponenten $< (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)$ bzw. $< (\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2)$, d. h. sämtliche Elemente $< \mathfrak{G}$, deren Komponenten $< \mathfrak{C}_1$ bzw. $< \mathfrak{C}_2$. Also ist

$$(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) < \overline{\mathfrak{N}} ,$$

mithin

$$(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \overline{\mathfrak{N}} .$$

Damit ist die erste Gleichung (5) bewiesen. Um die zweite Gleichung (5) zu beweisen, führe man die Bezeichnung

$$(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) \times (\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2) = \mathfrak{U}$$

ein. Es ist

$$\mathfrak{U} < \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 ,$$

mithin

$$(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{U}) < (\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \overline{\mathfrak{N}} .$$

Andrerseits ist wegen der ersten Gleichung (5)

$$\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{U} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{N}} < \overline{\mathfrak{G}} ,$$

mithin $\overline{\mathfrak{N}} < (\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{U})$, also $\overline{\mathfrak{N}} = (\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{U})$. Damit ist auch die zweite Gleichung (5) bewiesen.

Um (6) zu beweisen, bezeichne man seine rechte Seite vorläufig mit $\mathfrak{P}$. Es ist

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 <_i \mathfrak{G} , \qquad \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 < \mathfrak{P} < \mathfrak{G} ,$$

ebenso

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 < \overline{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) < \mathfrak{G} .$$

Es genügt also,

$$\frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$$

zu zeigen. Nun ist nach Hilfssatz I

$$\frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2} \gtrsim \frac{\overline{\mathfrak{G}}}{(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)} .$$

Es genügt also, zu zeigen, daß $\mathfrak{P}$ genau aus denjenigen Komplexen von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$ besteht, welche Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthalten. Wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

so ist

$$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \,\overline{\tau}\, \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Also ist jeder Komplex von $\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}$ in einem Komplex von $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$ enthalten. Wenn umgekehrt

$$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \,\overline{\tau}\, \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 ,$$

so schließen die beiden Komplexe wohlbestimmte Komplexe von

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2)}$$

ein. Es sei

$$\overline{B}_1' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) < \overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 , \qquad \overline{B}_2' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) < \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 ;$$

es sei ferner

$$\overline{B}_1' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) \,\overline{\pi}\, \overline{B}_2'' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) ;$$

dann ist

$$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 = \overline{B}_1' \cdot \mathfrak{C}_1 \,\overline{\tau}\, \overline{B}_2'' \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Da die Zuordnung der Komplexe durch den Isomorphismus $\overline{\tau}$ eineindeutig ist, so ist

$$\overline{B}_2'' \cdot \mathfrak{C}_2 = \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Es ist also

$$\overline{B}_2'' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) < \overline{B}_2'' \cdot \mathfrak{C}_2 = \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Es war aber

$$\overline{B}_2' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) < \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Da die Zuordnung der einschließenden und der eingeschlossenen Komplexe eineindeutig ist, so ist

$$\overline{B}_2' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) = \overline{B}_2'' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) ,$$

also

$$\overline{B}_1' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) \,\overline{\pi}\, \overline{B}_2' \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) .$$

Folglich enthält jeder Komplex von $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$ einen Komplex von $\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}$; also besteht $\mathfrak{P}$ genau aus denjenigen Komplexen von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$, welche Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthalten; folglich

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2} = \frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2} ;$$

mithin

$$\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) .$$

Das ist aber Behauptung (6).

Zur Abkürzung mögen die rechten Seiten von (7) (a), (7) (b) und (8) bzw. mit $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden. Es ist $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{R}$, da, wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

nach (2) auch

$$\overline{B}_1 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) \,\overline{\pi}\, \overline{B}_2 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) .$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß $\mathfrak{R} < \mathfrak{D}_1$. Bei der Bildung von $\mathfrak{D}_1$ ist der Isomorphismus zwischen dem ersten und dem dritten Ausdruck in (3) zu benutzen. Jeder Komplex $\overline{B}_2 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)$ von $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)}$ kommt bei der Bildung von $\mathfrak{D}_1$ mit einem Komplex von $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$ multipliziert vor, der einen Komplex $\overline{B}_1 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)$ von $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}$ einschließt, so daß wegen (3)

$$\overline{B}_2 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) \,\overline{\pi}\, \overline{B}_1 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) .$$

Also ist

$$\mathfrak{R} < \mathfrak{D}_1 .$$

Mithin ist

$$\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{R} < \mathfrak{D}_1 .$$

Da auch $\mathfrak{C}_1 < \mathfrak{D}_1$, ist $\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1 < \mathfrak{D}_1$.

Es sei

$$B_1 \times \overline{B}_2 < \mathfrak{D}_1 , \qquad B_1 < \overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 , \qquad \overline{B}_2 < \overline{\mathfrak{B}}_2 ,$$

$\overline{B}_1 < \overline{\mathfrak{B}}_1$ sei so bestimmt, daß

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\cap}\, \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 .$$

Dann ist wegen (3)

$$B_1 < \overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \quad \text{oder} \quad B_1 = \overline{B}_1 \cdot C_1 ,$$

wo $C_1 < \mathfrak{C}_1$. Es ergibt sich

$$B_1 \times \overline{B}_2 = \overline{B}_1 \cdot C_1 \times \overline{B}_2 = (\overline{B}_1 \times \overline{B}_2) \cdot C_1 .$$

Da

$$\overline{B}_1 \times \overline{B}_2 < \overline{\mathfrak{G}} ,$$

so ist

$$B_1 \times \overline{B}_2 < \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1 ,$$

also

$$\mathfrak{D}_1 < \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1 .$$

Es war $\mathfrak{D}_1 > \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1$, mithin

$$\mathfrak{D}_1 = \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1 , \qquad \text{ebenso} \qquad \mathfrak{D}_2 = \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Damit ist (7) (a) und (7) (b) bewiesen.

Um (8) zu beweisen, ist nunmehr zu zeigen, daß $\mathfrak{R} = (\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2)$. Es war $\mathfrak{R} < \mathfrak{D}_1 , \quad \mathfrak{R} < \mathfrak{D}_2$, mithin

$$\mathfrak{R} < (\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2) .$$

Es sei

$$(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2) = \frac{\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_1}{\overline{\overline{\mathfrak{C}}}_1} \asymp \frac{\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_2}{\overline{\overline{\mathfrak{C}}}_2} .$$

Es ist

$$\overline{\overline{\mathfrak{C}}}_1 = (\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 , \mathfrak{A}_1) = \big((\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{A}_1) , (\mathfrak{D}_2 , \mathfrak{A}_1)\big) = \big(\mathfrak{C}_1 , (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)\big) = (\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1) ,$$

ebenso

$$\overline{\overline{\mathfrak{C}}}_2 = (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) .$$

Es ist

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_1 < \overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \qquad \text{und} \qquad \overline{\overline{\mathfrak{B}}}_1 < \overline{\mathfrak{B}}_1 ;$$

mithin

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_1 < (\overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 , \overline{\mathfrak{B}}_1) = \overline{\mathfrak{B}}_1 .$$

Da aber bereits $\mathfrak{R} < (\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2)$ die $\mathfrak{A}_1$-Komponente $\overline{\mathfrak{B}}_1$ hat, so ist $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_1 = \overline{\mathfrak{B}}_1$. Es ist also

$$(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)} \asymp \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2)} .$$

Da $\mathfrak{R}$ mit $\overset{\times}{\underset{\text{II}}{}}$ dieselbe Gestalt hat, ist

$$\text{Ord}\,\mathfrak{R} = \text{Ord}\,(\mathfrak{Q}_1\,,\,\mathfrak{Q}_2)\,; \qquad \mathfrak{R} = (\mathfrak{Q}_1\,,\,\mathfrak{Q}_2)\,.$$

Hieraus folgt aber in Verbindung mit (7) (a) und (7) (b) die Behauptung (8).

Um (9) zu beweisen, benutze man wieder die Abkürzung

$$(\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1) \times (\overline{\mathfrak{B}}_2\,,\,\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{U}\,.$$

Es ist nach (8)

$$\mathfrak{U} < \mathfrak{R}\,, \qquad \overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{R}\,,$$

mithin

$$\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U} < \mathfrak{R}\,,$$

folglich

$$(\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}\,,\,\mathfrak{A}_1) < (\mathfrak{R}\,,\,\mathfrak{A}_1) = (\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1)\,.$$

Andrerseits ist

$$(\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1) < \mathfrak{U} < \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}\,, \qquad (\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1) < \mathfrak{A}_1\,,$$

mithin

$$(\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1) < (\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}\,,\,\mathfrak{A}_1)\,,$$

also

$$(\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}\,,\,\mathfrak{A}_1) = (\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1)\,, \qquad \text{ebenso} \qquad (\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}\,,\,\mathfrak{A}_2) = (\overline{\mathfrak{B}}_2\,,\,\mathfrak{C}_2)\,.$$

Es ist die $\mathfrak{A}_1$-Komponente von $\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}$ gleich

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1) = \overline{\mathfrak{B}}_1\,,$$

ebenso ist die $\mathfrak{A}_2$-Komponente von $\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}$ gleich $\overline{\mathfrak{B}}_2$. Mithin ist

$$\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{(\overline{\mathfrak{B}}_1\,,\,\mathfrak{C}_1)} \overset{\times}{\sim} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{(\overline{\mathfrak{B}}_2\,,\,\mathfrak{C}_2)}\,,$$

also

$$\text{Ord}\,(\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}) = \text{Ord}\,\mathfrak{R}\,; \qquad \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{R}\,.$$

Damit ist aber die Behauptung (9) bewiesen.

Satz III: *Es sei*

$$\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2\,,$$

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\times}{\underset{\text{T}}{}} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}\,, \qquad \overline{\mathfrak{G}} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\times}{\underset{\text{II}}{}} \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\mathfrak{C}_2}\,,$$

so ist

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 <_i \mathfrak{B}_1\,, \qquad \overline{\mathfrak{B}}_2 <_i \mathfrak{B}_2\,,$$

und es gilt, wenn

(1) $$B_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \,\text{T}\, B_2 \cdot \mathfrak{C}_2$$

und

(2) $$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\text{II}\, \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2\,,$$

die Beziehung

(3) $$B_1 \overline{B}_1 B_1^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\text{II}\, B_2 \overline{B}_2 B_2^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2\,.$$

Beweis: Wenn (1) gilt, so ist

$$G = B_1 \times B_2 < \mathfrak{G} ;$$

wenn (2) gilt, so ist

$$\overline{G} = \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 < \overline{\mathfrak{G}} .$$

Es ist nun

$$G\overline{G}G^{-1} = \overline{G}' < \overline{\mathfrak{G}} ,$$

also

$$B_1\overline{B}_1B_1^{-1} \times B_2\overline{B}_2B_2^{-1} < \overline{\mathfrak{G}} ,$$

folglich gilt (3).

Ferner ergibt sich

$$B_1\overline{B}_1B_1^{-1} < \overline{\mathfrak{B}}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{B}}_1 <_i \mathfrak{B}_1 , \qquad \text{ebenso} \qquad \overline{\mathfrak{B}}_2 <_i \mathfrak{B}_2 .$$

Bemerkung: In Worten ausgedrückt bedeutet dies folgendes:

Zwei Elemente B_1 und B_2, die zwei durch den Isomorphismus I *einander zugeordneten Komplexen von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ bzw. $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ angehören, rufen in den Faktorgruppen $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$ bzw. $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}$ Automorphismen hervor, die durch den Isomorphismus* II *einander entsprechen.*

Satz IIIa. Umkehrung zu Satz III:

Es sei

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 <_i \mathfrak{B}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{B}}_2 <_i \mathfrak{B}_2$$

und zwischen zwei Isomorphismen

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \curlywedge \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} \curlywedge \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}$$

mögen die Beziehungen bestehen, daß wenn

(1) $$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \curlywedge \overline{B}_2\,\overline{\mathfrak{C}}_2$$

auch

(2) $$\overline{B}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \curlywedge \overline{B}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Wenn ferner (1) *gilt und außerdem*

(3) $$B_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \curlywedge B_2 \cdot \mathfrak{C}_2 ,$$

dann soll

(4) $$B_1\overline{B}_1B_1^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \curlywedge B_2\overline{B}_2B_2^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2$$

sein. Bildet man dann

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \times \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{G}} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \times \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} ,$$

so ist

$$\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G} .$$

Beweis: Es ist zunächst $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$, weil die Voraussetzungen des Satzes Ia erfüllt sind. Wenn (1) gilt, ist

$$\overline{G} = \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 < \overline{\mathfrak{G}} ;$$

wenn (3) gilt, ist

$$G = B_1 \times B_2 < \mathfrak{G} .$$

$\overline{G}$ und G durchlaufen hierin alle Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\mathfrak{G}$. Wegen (4) ist

$$G\overline{G}G^{-1} = B_1\overline{B}_1B_1^{-1} \times B_2\overline{B}_2B_2^{-1} < \overline{\mathfrak{G}} ,$$

also ist

$$\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G} .$$

Abkürzung: *Wenn jedes Element von* $\mathfrak{X}$ *vertauschbar ist mit jedem Element von* $\mathfrak{Y}$, *so schreiben wir*:

$$\mathfrak{X} \text{ ewvm } \mathfrak{Y} ,$$

„ $\mathfrak{X}$ elementweise vertauschbar mit $\mathfrak{Y}$“.

Zwischen zwei Faktorgruppen hat das Zeichen nur Sinn, wenn beide Faktorgruppen Untergruppen einer umfassenderen Faktorgruppe sind, also denselben Nenner haben, und bedeutet Vertauschbarkeit jedes Komplexes der einen mit jedem Komplex der anderen Faktorgruppe.

Satz IV: *Unter den Voraussetzungen des Satzes III a ist*

(1) $$\overline{\mathfrak{C}}_1 <_i \mathfrak{B}_1 , \qquad \overline{\mathfrak{C}}_2 <_i \mathfrak{B}_2 ;$$

(2) $$\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \text{ ewvm } \frac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} , \qquad \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} \text{ ewvm } \frac{\mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Vorbemerkung zu Satz IV: Aus den Voraussetzungen des Satzes III folgen die Voraussetzungen des Satzes III a und umgekehrt. Wir hätten also auch die Voraussetzungen des Satzes III machen können. Die Behauptungen des Satzes IV beziehen sich auf Komponenten und mögen auch aus den Voraussetzungen des Satzes III a bewiesen werden, die sich auf Komponenten beziehen. Die folgenden Sätze geben *notwendige* Bedingungen dafür, daß sich $\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ bilden läßt.

Beweis zu Satz IV: Es sei $\overline{C}_1 < \overline{\mathfrak{C}}_1$; es ist

$$\overline{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 = \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, \overline{\mathfrak{C}}_2 = E \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 .$$

Wenn $B_1 < \mathfrak{B}_1$, $\quad B_2 < \mathfrak{B}_2$ und

$$B_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \,\tau\, B_2 \cdot \mathfrak{C}_2 ,$$

so ist nach (4)

$$B_1\overline{C}_1B_1^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, B_2 E B_2^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 = E \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 = \overline{\mathfrak{C}}_2 .$$

Nun ist aber

$$\overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, \overline{\mathfrak{C}}_2 ;$$

also ist wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung $\overline{\pi}$

$$B_1\overline{C}_1B_1^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 = \overline{\mathfrak{C}}_1 ; \qquad B_1\overline{C}_1B_1^{-1} < \overline{\mathfrak{C}}_1 ,$$

d. h.

$$\overline{\mathfrak{C}}_1 <_i \mathfrak{B}_1 , \qquad \text{ebenso} \qquad \overline{\mathfrak{C}}_2 <_i \mathfrak{B}_2 .$$

Es sei $C_1 < \mathfrak{C}_1$; es ist

$$C_1 \cdot \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1 \,\tau\, \mathfrak{C}_2 = E \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Wenn

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, \overline{B}_2 \,\overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

so ist mithin

$$C_1\overline{B}_1C_1^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, E\,\overline{B}_2\,E^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 = \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 .$$

Da aber

$$\overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 \,\overline{\pi}\, \overline{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_2 ,$$

so ist wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung $\overline{\pi}$

$$C_1 \overline{B}_1 C_1^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1 = \overline{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}}_1$$

oder

$$C_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot \overline{B}_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot C_1^{-1} \overline{\mathfrak{C}}_1 = \overline{B}_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 ,$$

$$C_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot \overline{B}_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 = \overline{B}_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot C_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 .$$

$\frac{\overline{\mathfrak{C}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$ ewvm $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$, ebenso $\frac{\overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}$ ewvm $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}$.

Bemerkung: *Alle Elemente eines Komplexes nach* $\mathfrak{C}_1$ *rufen mithin in* $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$ *bei der Transformation den gleichen Automorphismus hervor.*

Vergleiche die Bemerkung hinter Satz III.

Hilfssatz II: *Es sei*

$$\mathfrak{M} < \mathfrak{A} , \quad \mathfrak{N} < \mathfrak{A} , \qquad \mathfrak{M} \text{ ewvm } \mathfrak{N} ;$$

dann ist

$$(\mathfrak{M} , \mathfrak{N}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{M}) \qquad \textit{und} \qquad (\mathfrak{M} , \mathfrak{N}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{N}) .$$

$\mathfrak{z}(\mathfrak{M})$ bedeutet das Zentrum von $\mathfrak{M}$, d. h. die invariante Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{M}$, die mit allen Elementen von $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind.

Beweis: Es seien D und M beliebige Elemente

$$D < (\mathfrak{M} , \mathfrak{N}) , \qquad M < \mathfrak{M} .$$

Da $D < \mathfrak{N}$, ist

$$DM = MD .$$

Da außerdem $D < \mathfrak{M}$, so ist

$$D < \mathfrak{z}(\mathfrak{M}) , \qquad \text{also} \qquad (\mathfrak{M} , \mathfrak{N}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{M}) , \qquad \text{ebenso} \qquad (\mathfrak{M} , \mathfrak{N}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{N}) .$$

Folgerung I aus Satz IV: *Aus Satz IV und Hilfssatz II folgt*

$$\frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} < \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right) ; \qquad \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1 , \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right) ,$$

ebenso für den Index 2.

Hilfssatz III: *Man setze*

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right) = \frac{\overline{\mathfrak{Z}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} , \qquad \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}\right) = \frac{\overline{\mathfrak{Z}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} , \qquad \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right) = \frac{\overline{\mathfrak{Z}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} ;$$

dann ist

$$\overline{\mathfrak{Z}} = \frac{\overline{\mathfrak{Z}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \asymp \frac{\overline{\mathfrak{Z}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Beweis: Es ist, wie im Beweise von DUDP Satz I gezeigt,

$$\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} \sim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \sim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Dieser Isomorphismus enthält den Isomorphismus

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right) \sim \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right) \sim \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}\right) ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Folgerung II aus Satz IV: *Unter den Voraussetzungen des Satzes III ist*

$$\frac{\overline{\mathfrak{N}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \frac{(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right).$$

Beweis: Es ist nach Satz II Behauptung (5) unter Benutzung der Folgerung I aus Satz IV und des Hilfssatzes III

$$\overline{\mathfrak{N}} = \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\overline{\mathfrak{n}}}{\times} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} < \frac{\overline{\mathfrak{Z}}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\overline{\mathfrak{n}}}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{Z}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} = \overline{\mathfrak{Z}},$$

mithin

$$\frac{\overline{\mathfrak{N}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} < \frac{\overline{\mathfrak{Z}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right).$$

Folgerung III aus Satz IV: *Es ist*

$$\frac{\overline{\mathfrak{N}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right).$$

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right) = \frac{\mathfrak{Y}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}, \qquad \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}\right) = \frac{\mathfrak{Y}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2}.$$

Es ist nach Hilfssatz I

$$\frac{\mathfrak{C}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} \gtrsim \frac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1};$$

folglich

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right) \gtrsim \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}\right) = \frac{\mathfrak{Y}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1},$$

mithin

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right) = \frac{\mathfrak{Y}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}.$$

Es ist $\mathfrak{C}_1$ ewvm $\mathfrak{C}_2$, und $\mathfrak{C}_1$ teilerfremd zu $\mathfrak{C}_2$. Geht man durch Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2$ zu Komplexen nach $\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2$ über, so bleiben diese beiden Beziehungen erhalten, bleibt also das Produkt ein direktes. Es ist

$$\frac{\mathfrak{C}_1 (\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \frac{\mathfrak{C}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2},$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \frac{\mathfrak{C}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \frac{\mathfrak{C}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} \times \frac{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}.$$

Da für direkte Produkte

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2) = \mathfrak{z}(\mathfrak{X}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{X}_2),$$

so ist

$$\mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right) = \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right) \times \mathfrak{z}\left(\frac{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_1}\right) = \frac{\mathfrak{Y}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} \times \frac{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \mathfrak{Y}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}$$

$$= \frac{(\mathfrak{Y}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2) \cdot (\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \mathfrak{Y}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \frac{\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}.$$

Es ist nach Satz II Behauptung (5) und unter Benutzung der Folgerung I aus Satz IV

$$(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\overline{\Pi}}{\times} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} < (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) \times (\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2) < \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 ,$$

mithin

$$\frac{(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} < \frac{\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}\right),$$

was zu beweisen war.

Satz V: *Sei*

$$\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 ;$$

dann besitzt die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\overline{\mathfrak{G}}}$ *die invarianten Untergruppen*

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}} \sim \frac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}, \qquad \frac{\mathfrak{C}_2 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}} \sim \frac{\mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} ;$$

es ist

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}} \text{ ewvm } \frac{\mathfrak{C}_2 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}} ;$$

es ist ferner

$$(3) \qquad \left(\frac{\mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}}, \frac{\mathfrak{C}_2 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}}\right) \sim \frac{(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Beweis: Es ist nach Hilfssatz I, da $\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G}$,

$$\frac{\mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}} \gtrsim \frac{\mathfrak{C}_1}{(\mathfrak{C}_1, \overline{\mathfrak{G}})} = \frac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1},$$

ebenso

$$\frac{\mathfrak{C}_2 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}} \gtrsim \frac{\mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Damit ist die Behauptung (1) bewiesen.

Es sei $C_1 < \mathfrak{C}_1$, $C_2 < \mathfrak{C}_2$. Es ist, da $\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G}$,

$$C_1\,\overline{\mathfrak{G}} \cdot C_2\,\overline{\mathfrak{G}} = C_1 \cdot C_2\,\overline{\mathfrak{G}} \cdot \overline{\mathfrak{G}} = C_2 \cdot C_1\,\overline{\mathfrak{G}} \cdot \overline{\mathfrak{G}} = C_2\,\overline{\mathfrak{G}} \cdot C_1\,\overline{\mathfrak{G}} .$$

Mithin gilt die Behauptung (2).

Um die Behauptung (3) zu beweisen, setze man wieder zur Abkürzung

$$(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) \times (\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2) = \mathfrak{U} .$$

Es ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G}$, mithin nach Hilfssatz I

$$\frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}}{\overline{\mathfrak{G}}} \gtrsim \frac{\mathfrak{U}}{(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{U})} .$$

Wendet man die Aussagen (9) und (5) (letzten Teil) des Satzes II an, so erhält man

((10) ist ausgefallen)

$$(11) \qquad \left(\frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{G}}}, \frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{G}}}\right) \gtrsim \frac{\mathfrak{U}}{\overline{\mathfrak{N}}} .$$

Wendet man die Formel

$$\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$$

an auf

$$\overline{\mathfrak{N}} = \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\overline{\Pi}}{\times} \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} ,$$

so erhält man

$$\overline{\mathfrak{N}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) = \mathfrak{U} .$$

Es ist

$$\big(\overline{\mathfrak{N}}, (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)\big) = \overline{\mathfrak{C}}_1 .$$

Wendet man nochmal Hilfssatz I an, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{U}}{\overline{\mathfrak{N}}} = \frac{\overline{\mathfrak{N}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{N}}} \gtrsim \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\big(\overline{\mathfrak{N}}, (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)\big)} = \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} .$$

Es ist also

$$(12) \qquad \frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}}{\overline{\mathfrak{G}}} \gtrsim \frac{\mathfrak{U}}{\overline{\mathfrak{N}}} \gtrsim \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} .$$

Das Zeichen $\gtrsim$ ist transitiv. Ich habe diesen Beweis gewählt, weil die unterwegs benutzte Beziehung (11) an sich von Interesse ist. Es läßt sich

$$\frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}}{\overline{\mathfrak{G}}} \gtrsim \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$$

auch direkt zeigen. Wenn

$$\overline{B}_1 \times \overline{B}_2 = \overline{G} < \overline{\mathfrak{G}} \qquad \text{und} \qquad \overline{B}_1 < (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) ,$$

so ist

$$\overline{B}_2 = \overline{B}_1^{-1} \cdot \overline{G} < (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) \cdot \overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) .$$

Wegen Satz II Behauptung (2) gilt dies stets, wenn

$$\overline{B}_2 < (\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2) .$$

Mithin ist

$$(\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2) < \overline{\mathfrak{G}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) ,$$

folglich

$$\mathfrak{U} < \overline{\mathfrak{G}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) ; \qquad \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U} < \overline{\mathfrak{G}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) .$$

Da andrerseits

$$\overline{\mathfrak{G}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) < \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U} ,$$

so ist

$$\overline{\mathfrak{G}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1) = \overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U} .$$

Ferner ist

$$\overline{\mathfrak{C}}_1 < \big(\overline{\mathfrak{G}}, (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)\big) < (\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1) = \overline{\mathfrak{C}}_1 ;$$

mithin

$$\big(\overline{\mathfrak{G}}, (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)\big) = \overline{\mathfrak{C}}_1 .$$

Es ist also

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{G}}}, \frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{C}_2}{\overline{\mathfrak{G}}}\right) = \frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{U}}{\overline{\mathfrak{G}}} = \frac{\overline{\mathfrak{G}} \cdot (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{G}}} \gtrsim \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\big(\overline{\mathfrak{G}}, (\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)\big)} = \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} .$$

Unter Benutzung der Behauptung (5) von Satz II und von DUDP Satz I ist

$$\frac{(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \frac{\overline{\mathfrak{N}}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} = \frac{\dfrac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \underset{\overline{\Pi}}{\times} \dfrac{(\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2}}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2} \sim \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_1, \mathfrak{C}_1)}{\overline{\mathfrak{C}}_1} \sim \frac{(\overline{\mathfrak{B}}_2, \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_2} .$$

Damit ist aber die Behauptung (3) des Satzes V bewiesen. Die Faktorgruppe $\dfrac{(\overline{\mathfrak{G}}, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)}{\overline{\mathfrak{C}}_1 \times \overline{\mathfrak{C}}_2}$ ist mit Rücksicht auf die Folgerung II aus Satz IV stets eine kommutative Gruppe.

Satz VI: *Es sei wieder*

$$\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 , \qquad C_1 < \mathfrak{C}_1 , \qquad G = B_1 \times B_2 < \mathfrak{G} .$$

Dann ist, weil $\mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{G}$,

$$G C_1 G^{-1} = B_1 C_1 B_1^{-1} = C_1' < \mathfrak{C}_1 .$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{C}}_1$

$$G\overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot C_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot G^{-1}\overline{\mathfrak{C}}_1 = B_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot C_1 \overline{\mathfrak{C}}_1 \cdot B_1^{-1} \overline{\mathfrak{C}}_1 = C_1' \overline{\mathfrak{C}}_1 .$$

Geht man durch Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{G}}$ *zu den einschließenden Komplexen über, so erhält man*

$$G\overline{\mathfrak{G}} \cdot C_1 \overline{\mathfrak{G}} \cdot G^{-1} \overline{\mathfrak{G}} = C_1' \overline{\mathfrak{G}} .$$

Die Faktorgruppe $\dfrac{\mathfrak{C}_1 \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}}$ *erleidet mithin in* $\dfrac{\mathfrak{G}}{\overline{\mathfrak{G}}}$ *die gleichen Automorphismen wie die eingeschlossene Faktorgruppe* $\dfrac{\mathfrak{C}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$ *in* $\dfrac{\mathfrak{G}}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$ *oder in* $\dfrac{\mathfrak{B}_1}{\overline{\mathfrak{C}}_1}$. *Nach Satz V Behauptung* (2) *liefern also alle Elemente von* $\dfrac{\mathfrak{G}}{\overline{\mathfrak{G}}}$, *die dem gleichen Komplex von*

$$\frac{\left(\dfrac{\mathfrak{G}}{\overline{\mathfrak{G}}}\right)}{\left(\dfrac{\mathfrak{C}_2 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}}\right)}$$

angehören, bei der Transformation denselben Automorphismus in $\dfrac{\mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{G}}}$.

§ 2.

In diesem Paragraphen soll die Untergruppe eines direkten Produktes von 3 Faktoren behandelt werden. Es sei

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 .$$

Es werden die Abkürzungen eingeführt:

(1) $\mathfrak{B}_1 = \big(\mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2), \mathfrak{A}_1\big)$,

(2) $\mathfrak{H}_{1,2} = (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$,

(3) $\mathfrak{K}_1 = (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3)$,

(4) $\mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1)$,

(5) $\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3)$,

(6) $\mathfrak{L}_1 = (\mathfrak{H}_{2,1}, \mathfrak{H}_{3,1})$,

(7) $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}_{2,1} \cdot \mathfrak{H}_{3,1}$,

ebenso die sämtlichen durch Vertauschung der Indizes hieraus entstehenden Gleichungen. Es gibt also 3 Gruppen $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$, $\mathfrak{D}_\nu$, $\mathfrak{L}_\nu$, $\mathfrak{M}_\nu$ und 6 Gruppen $\mathfrak{H}_{\lambda,\mu}$. Es ist entsprechend DUDP Korollar I Satz I $\mathfrak{B}_1$ die Gruppe der $\mathfrak{A}_1$-Komponenten von $\mathfrak{G}$. Diese möge vorläufig mit $\mathfrak{B}_1'$ bezeichnet werden; $\mathfrak{B}_1$ sei durch (1) definiert. Es sei

$$G = B_1 \times B_2 \times B_3 < \mathfrak{G} ,$$
$$A_2 \times A_3 < \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 .$$

Um den Durchschnitt zu bilden, muß angenommen werden, daß

$$G \cdot (A_2 \times \mathfrak{A}_3) = A_1 < \mathfrak{A}_1$$

sei oder

$$B_1 \times B_2 A_2 \times B_3 A_3 = A_1 .$$

Es muß also sein

$$B_1 = A_1 , \qquad B_2 A_2 = E , \qquad B_3 A_3 = E ;$$

mithin ist

$$A_1 < \mathfrak{B}_1' ; \qquad \mathfrak{B}_1 = \big(\mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) , \mathfrak{A}_1\big) < \mathfrak{B}_1' .$$

Wenn umgekehrt B_1 irgendein Element von $\mathfrak{B}_1'$, so existiert

$$G = B_1 \times B_2 \times B_3 < \mathfrak{G} .$$

Setzt man dann

$$A_2 = B_2^{-1} , \qquad A_3 = B_3^{-1} ,$$

so ist

$$A_2 < \mathfrak{A}_2 , \qquad A_3 < \mathfrak{A}_3 ;$$

und es ist

$$B_1 = G \cdot (A_2 \times A_3) < \mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3)$$

und $B_1 < \mathfrak{A}_1$, mithin

$$B_1 < \big(\mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) , \mathfrak{A}_1\big) = \mathfrak{B}_1 ,$$

mithin $\mathfrak{B}_1' < \mathfrak{B}_1$, also

$$\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1 .$$

Man betrachte das direkte Produkt

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3)$$

als direktes Produkt zweier Faktoren und wende die letzte Formel in DUDP Korollar I zu Satz I an. Es ergibt sich

$$(8) \qquad \mathfrak{G} = \frac{\big(\mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) , \mathfrak{A}_1\big)}{(\mathfrak{G} , \mathfrak{A}_1)} \underset{\mathfrak{M}_1}{\times} \frac{(\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3)}{(\mathfrak{G} , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3)} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\mathfrak{M}_1}{\times} \frac{\mathfrak{K}_1}{\mathfrak{D}_1} .$$

Die Indizes unter dem $\sim$-Zeichen dienen zur Unterscheidung der vorkommenden Isomorphismen. Es ist

$$\mathfrak{K}_1 < \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 ,$$

mithin

$$(9) \qquad \mathfrak{K}_1 = \frac{(\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2)}{(\mathfrak{K}_1 , \mathfrak{A}_2)} \underset{\mathfrak{N}_1}{\times} \frac{(\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 , \mathfrak{A}_3)}{(\mathfrak{K}_1 , \mathfrak{A}_3)} .$$

Es soll gezeigt werden, daß

$$(\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{B}_2 .$$

Es ist

$$(\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = \big((\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2\big) < (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{B}_2 .$$

Es sei B_2 irgendein Element von $\mathfrak{B}_2$. Dann existiert

$$G = B_1 \times B_2 \times B_3 < \mathfrak{G} .$$

Setzt man dann $A_1 = B_1^{-1}$, so ist

$$A_1 < \mathfrak{A}_1 , \qquad G A_1 < \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 \qquad \text{und} \qquad G A_1 = B_2 \times B_3 < \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 ,$$

mithin

$$B_2 \times B_3 < (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{K}_1 .$$

Setzt man $A_3 = B_3^{-1}$, so ist

$$A_3 < \mathfrak{A}_3 , \qquad B_2 = (B_2 \times B_3) \cdot A_3 < \mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 \qquad \text{und} \qquad B_2 < \mathfrak{A}_2 ;$$

mithin

$$B_2 < (\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) ,$$

also

$$\mathfrak{B}_2 < (\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) ,$$

mithin

$$(\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{B}_2 . \tag{10}$$

Es ist

$$(\mathfrak{K}_1 , \mathfrak{A}_2) = (\mathfrak{G} . \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{H}_{1,2} . \tag{11}$$

Man erhält also

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \underset{\widetilde{1}1}{\times} \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}} . \tag{12}$$

Man bestimme ferner

$$\mathfrak{D}_1 < \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 .$$

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2)}{(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{A}_2)} \underset{\widetilde{1}1}{\times} \frac{(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 , \mathfrak{A}_3)}{(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{A}_3)} . \tag{13}$$

Es ist

$$(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) < (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{H}_{3,2} .$$

Es sei

$$G = B_1 \times B_2 \times B_3 < \mathfrak{G} .$$

Wenn

$$G A_3 = A_2 < \mathfrak{A}_2$$

sein soll, so muß

$$B_1 \times B_2 \times B_3 A_3 = A_2$$

sein, mithin

$$B_1 = E , \qquad A_2 = B_2 , \qquad A_3 = B_3^{-1} .$$

Dann ist

$$G = B_2 \times B_3 < \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 , \qquad G < \mathfrak{G} ;$$

folglich

$$G < (\mathfrak{G} , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{D}_1 ;$$

$$G \cdot A_3 < \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 ; \qquad G \cdot A_3 = B_2 < \mathfrak{A}_2 ;$$

mithin

$$B_2 < (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) .$$

Es ist also

$$\mathfrak{H}_{3,2} = (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) < (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_1) ,$$

mithin

$$(\mathfrak{D}_1 \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{H}_{3,2} .$$

Es ist

$$(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{A}_2) = (\mathfrak{G} , \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_2) = (\mathfrak{G} , \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{C}_2 . \tag{14}$$

Man erhält so

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{C}_2} \underset{\widetilde{\Pi 1}}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{C}_3} . \tag{15}$$

Durch Einsetzung von (12) und (15) in die Formel (8) für $\mathfrak{G}$ erhält man

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\widetilde{III 1}}{\times} \frac{\dfrac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \underset{\widetilde{\Gamma 1}}{\times} \dfrac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}}}{\dfrac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{C}_2} \underset{\widetilde{\Pi 1}}{\times} \dfrac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{C}_3}} . \tag{16}$$

Da $\mathfrak{D}_1 <_i \mathfrak{K}_1$, so kann man die Sätze I, III, II, IV bis VI anwenden. Hierbei treten an die Stelle der Buchstaben aus den Sätzen I bis VI

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{C}_1 , \mathfrak{C}_2 , \overline{\mathfrak{B}}_1 , \overline{\mathfrak{B}}_2 , \overline{\mathfrak{C}}_1 , \overline{\mathfrak{C}}_2 , \overline{\mathfrak{B}}_1 \cdot \mathfrak{C}_1 , \overline{\mathfrak{B}}_2 \cdot \mathfrak{C}_2 , (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_1) , (\overline{\mathfrak{B}}_2 , \mathfrak{C}_2) , \overline{\mathfrak{G}} , \mathfrak{G} \\ \qquad \text{die gegenwärtigen Buchstaben} \\ \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{B}_3 , \mathfrak{H}_{1,2} , \mathfrak{H}_{1,3} , \mathfrak{H}_{3,2} , \mathfrak{H}_{2,3} , \mathfrak{C}_2 , \mathfrak{C}_3 , \quad \mathfrak{M}_2 , \quad \mathfrak{M}_3 , \quad \mathfrak{L}_2 , \quad \mathfrak{L}_3 , \quad \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{K}_1 . \end{array}\right. \tag{17}$$

An die Stelle der in Satz II bis V zur Abkürzung eingeführten Buchstaben

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{\mathfrak{N}} , \mathfrak{P} , \mathfrak{Q}_1 , \mathfrak{Q}_2 , \mathfrak{R} , \quad \mathfrak{U} \\ \text{treten jetzt die Buchstaben} \\ \mathfrak{N}_1 , \mathfrak{P}_1 , \mathfrak{Q}_{1,2} , \mathfrak{Q}_{1,3} , \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 , \end{array}\right. \tag{18}$$

die den Gleichungen in [ ] beigefügt sind.

Es sei

$$H_{\lambda,\mu} < \mathfrak{H}_{\lambda,\mu} .$$

Wenn

$$H_{3,2} \cdot \mathfrak{C}_2 \, \widetilde{\Pi 1} \, H_{2,3} \cdot \mathfrak{C}_3 , \tag{19}$$

so ist auch

$$H_{3,2} \cdot \mathfrak{H}_{1,2} \, \widetilde{\Gamma 1} \, H_{2,3} \cdot \mathfrak{H}_{1,3} \tag{20}$$

nach Satz I. Wenn

$$H_{3,2} \cdot \mathfrak{C}_2 \, \widetilde{\Pi 1} \, H_{2,3} \cdot \mathfrak{C}_3 \tag{21}$$

und wenn

$$B_2 \cdot \mathfrak{H}_{1,2} \, \widetilde{\Gamma 1} \, B_3 \cdot \mathfrak{H}_{1,3} , \tag{22}$$

so ist

$$B_2 H_{3,2} B_2^{-1} \cdot \mathfrak{C}_2 \, \widetilde{\Pi 1} \, B_3 H_{2,3} B_3^{-1} \cdot \mathfrak{C}_3 \tag{23}$$

nach Satz III. Es ist

$$\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2} \, \widetilde{\Pi 1} \, \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3} \tag{24}$$

nach Satz II Behauptung (2),

(25) $$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \gtrsim \frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{L}_2} \,\widetilde{\Pi 1}\, \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{L}_3} \lesssim \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}}$$

nach Satz II Behauptung (3),

(26) $$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \,\widetilde{\Pi 1}\, \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}}$$

nach Satz II Behauptung (4),

(27) $$(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{H}_{1,2} \times \mathfrak{H}_{1,3}) = \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2} \underset{\widetilde{\Pi 1}}{\times} \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3} \quad [= \mathfrak{N}_1] = (\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3)$$

nach Satz II Behauptung (5),

(28) $$[\mathfrak{Q}_{1,2} \cdot \mathfrak{Q}_{1,3} =] \quad \mathfrak{D}_1 \cdot (\mathfrak{H}_{1,2} \times \mathfrak{H}_{1,3}) = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \underset{\widetilde{\Pi 1}}{\times} \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}} \quad [= \mathfrak{P}_1]$$

nach Satz II Behauptung (6),

(29) $$\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{H}_{1,2} = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \underset{\widetilde{\Pi 1}}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{L}_3} \quad [= \mathfrak{Q}_{1,2}]$$

nach Satz II Behauptung (7) (a) (solcher Gleichungen gibt es 6),

(30) $$[(\mathfrak{Q}_{1,2} , \mathfrak{Q}_{1,3}) =] \quad (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{H}_{1,2} \ , \ \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{H}_{1,3}) = \frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{L}_2} \underset{\widetilde{\Pi 1}}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{L}_3} \quad [= \mathfrak{R}_1]$$

nach Satz II Behauptung (8),

(31) $$(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{H}_{1,2} , \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{H}_{1,3}) = \mathfrak{D}_1 \cdot (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \quad [= \mathfrak{R}_1]$$

nach Satz II Behauptung (9). Es ist

$$\mathfrak{D}_1 <_i \mathfrak{R}_1 , \qquad \mathfrak{H}_{1,2} <_i \mathfrak{R}_1$$

nach DUDP Satz I, also

$$\mathfrak{Q}_{1,2} <_i \mathfrak{R}_1 .$$

Es ist

(32) $$\frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{C}_2} \text{ ewvm } \frac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2} \qquad \text{(3 Gleichungen)}$$

nach Satz IV,

(33) $$\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{C}_2}\right) \qquad \text{(6 Gleichungen)}$$

nach Folgerung I aus Satz IV,

(34) $$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_3} = \frac{(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{H}_{1,2} \times \mathfrak{H}_{1,3})}{\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_3} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_3}\right)$$

nach Folgerung II aus Satz IV,

(35) $$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_3} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{H}_{1,2} \times \mathfrak{H}_{1,3}}{\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_3}\right)$$

nach Folgerung III aus Satz IV. Es enthält die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1}$ die invarianten Untergruppen

(36) $$\frac{\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2} ,$$

(37) $$\frac{\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{H}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{H}_{1,3}}{\mathfrak{C}_3} ;$$

es ist

$$\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} \text{ ewvm } \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1}$$

nach Satz V Behauptung (1) bis (3). Es ist

$$\textbf{(38)} \qquad \frac{\mathfrak{D}_1 \cdot (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3)}{\mathfrak{D}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3}{(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3)}$$

oder mit Rücksicht auf (36), (37), (31), (27) in Übereinstimmung mit Satz V (11)

$$\textbf{(39)} \qquad \left(\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}, \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1}\right) = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3}{\mathfrak{N}_1} .$$

Hierin ist wieder

$$\textbf{(40)} \qquad \frac{\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3}{\mathfrak{N}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2} \qquad \text{und} \qquad \textbf{(41)} \qquad \frac{\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3}{\mathfrak{N}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$$

in Übereinstimmung mit Satz V (12).

Welche Untergruppen von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ ordnet der Isomorphismus

$$\textbf{(42)} \qquad \frac{\mathfrak{K}_1}{\mathfrak{D}_1} \overset{\text{III}_1}{\sim} \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$$

den Untergruppen

$$\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}, \quad \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1},$$

$$\left(\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}, \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1}\right) = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1},$$

$$\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} \cdot \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{D}_1}$$

von $\frac{\mathfrak{K}_1}{\mathfrak{D}_1}$ zu?

Wir fragen, welche Untergruppe $\mathfrak{X}_{1,2}$ von $\mathfrak{G}$ erhalten wir, wenn wir anstatt aller in $\mathfrak{K}_1$ enthaltenen $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponenten von $\mathfrak{G}$ nur die in $\mathfrak{Q}_{1,2} < \mathfrak{K}_1$ enthaltenen $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponenten berücksichtigen. Wir setzen

$$\textbf{(42) (a)} \qquad \mathfrak{X}_{1,2} = \frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} \underset{\text{III}_1}{\times} \frac{\mathfrak{Y}_{1,2}}{\mathfrak{C}_1} .$$

Hierin bedeute $\mathfrak{Y}_{1,2}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{B}_1$, die durch den Isomorphismus

$$\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} \overset{\text{III}_1}{\sim} \frac{\mathfrak{Y}_{1,2}}{\mathfrak{C}_1}$$

zugeordnet wird. Es war nach (36)

$$\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2} ;$$

d. h. in jedem Komplex von $\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}$ war ein wohlbestimmter Komplex von $\frac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2}$ eingeschlossen. Berücksichtigen wir bei der Bildung von $\mathfrak{G}$ nach (8) anstatt der vollen

Komplexe von $\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}$ nur die eingeschlossenen Komplexe von $\frac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2}$,

$$(42)\,(b) \qquad \mathfrak{W}_{1,2} = \frac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2} \underset{\widetilde{\Pi}_1}{\times} \frac{\mathfrak{Y}_{1,2}}{\mathfrak{C}_1},$$

worin $\mathfrak{W}_{1,2}$ zur Abkürzung eingeführt ist, so erhalten wir gleichwohl Elemente von $\mathfrak{G}$ aus allen denjenigen Komplexen von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1}$, die wir bei der Bildung von $\mathfrak{X}_{1,2}$ voll erhalten haben. Es ist also wegen $\mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{W}_{1,2}$

$$(42)\,(c) \qquad \mathfrak{W}_{1,2} \cdot (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{W}_{1,2} \cdot \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{X}_{1,2}.$$

Wegen (29) ist

$$(\mathfrak{Q}_{1,2}, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{H}_{1,2}.$$

$\mathfrak{X}_{1,2}$ bestand aus allen Elementen von $\mathfrak{G}$, deren $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente in $\mathfrak{Q}_{1,2}$ enthalten war. Von diesen enthält $\mathfrak{W}_{1,2}$ alle Elemente, deren $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente in $\mathfrak{H}_{1,2}$ enthalten ist; das sind also alle Elemente von $\mathfrak{G}$, deren $\mathfrak{A}_3$-Komponente gleich E ist, deren $\mathfrak{A}_2$-Komponente in $\mathfrak{H}_{1,2}$ enthalten ist. Es ist also unter Benutzung von (15)

$$(42)\,(d) \qquad \mathfrak{W}_{1,2} < (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{D}_3 = \frac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2} \underset{\widetilde{\Pi}_3}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1}.$$

$\mathfrak{W}_{1,2}$ besteht aus allen Elementen von $\mathfrak{D}_3$, deren $\mathfrak{A}_2$-Komponenten in $\mathfrak{H}_{1,2}$ enthalten sind. Das sind aber sämtliche Elemente von $\mathfrak{D}_3$, mithin

$$\mathfrak{W}_{1,2} = \mathfrak{D}_3, \qquad \mathfrak{Y}_{1,2} = \mathfrak{H}_{2,1}.$$

Aus (42) (a) und (42) (c) ergibt sich nunmehr

$$(43) \qquad \mathfrak{X}_{1,2} = \frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} \underset{\widetilde{\Pi}_1}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1} = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1.$$

Wegen $\mathfrak{D}_1 <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}_3 <_i \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1$. Durch Vertauschung der Indizes 1 und 3 erhalten wir also aus (43) die weitere Formel

$$(43)\,(a) \qquad \frac{\mathfrak{Q}_{3,2}}{\mathfrak{D}_3} \underset{\widetilde{\Pi}_3}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{C}_3} = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1.$$

Der Vergleich von (42) (d) mit (43) ergibt

$$(44) \qquad \frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1} \,\widetilde{\Pi}_1\, \frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}.$$

Wenn

$$H_{2,1} < \mathfrak{H}_{2,1}, \qquad H_{1,2} < \mathfrak{H}_{1,2}$$

und wenn

$$(45) \qquad H_{2,1} \cdot \mathfrak{C}_1 \,\widetilde{\Pi}_3\, H_{1,2} \cdot \mathfrak{C}_2,$$

so ist

$$(46) \qquad H_{2,1} \cdot \mathfrak{C}_1 \,\widetilde{\Pi}_1\, H_{1,2} \cdot \mathfrak{D}_1.$$

$\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3$ enthält nach dem Vorangehenden alle Elemente von $\mathfrak{G}$, deren $\mathfrak{A}_1$-Komponente gleich $\mathfrak{H}_{2,1}$; d. h. es ist

$$(46)\,(a) \qquad (\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{2,1} \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1,$$

ebenso

$$(46)\,(b) \qquad (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{H}_{2,3}) = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1;$$

mithin

$$(\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{H}_{2,1} \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 \ , \ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{H}_{2,3}) = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1$$

oder

$$\textbf{(46) (c)} \qquad (\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{H}_{2,1} \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{H}_{2,3}) = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ .$$

(43) lautet ausführlich mit Rücksicht auf (29) und (15)

$$\textbf{(47)} \qquad \frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1} \underset{\widetilde{\Pi\Pi}_1}{\times} \frac{\dfrac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \underset{\widetilde{\Pi\Pi}_1}{\times} \dfrac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{L}_3}}{\dfrac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{C}_2} \underset{\widetilde{\Pi\Pi}_1}{\times} \dfrac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{C}_3}} = \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ .$$

Durch Vertauschung der Indizes 3 und 1 erhält man die gleichberechtigte Formel

$$\textbf{(48)} \qquad \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{C}_3} \underset{\widetilde{\Pi\Pi}_3}{\times} \frac{\dfrac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{3,2}} \underset{\widetilde{\Pi\Pi}_3}{\times} \dfrac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{L}_1}}{\dfrac{\mathfrak{H}_{1,2}}{\mathfrak{C}_2} \underset{\widetilde{\Pi\Pi}_3}{\times} \dfrac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1}} \ .$$

Es soll die dritte Darstellung von $\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1$ ermittelt werden. Die $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$-Komponenten von $\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1$ sind bzw.

$$\mathfrak{H}_{2,1}, \quad \mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{H}_{2,3} \ ,$$

die Durchschnitte mit den direkten Faktoren bzw.

$$\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{C}_2, \quad \mathfrak{C}_3 \ ,$$

da z. B.

$$\mathfrak{C}_1 < \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ , \qquad \mathfrak{C}_1 < \mathfrak{A}_1 \ ,$$

mithin

$$\mathfrak{C}_1 < (\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ , \ \mathfrak{A}_1) \ .$$

Andrerseits ist

$$(\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ , \mathfrak{A}_1) < (\mathfrak{G} \ , \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{C}_1 \ ,$$

also

$$(\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ , \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{C}_1 \ ;$$

ebenso für $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_3$. Es sei

$$D_1 < \mathfrak{D}_1 \ , \qquad D_3 < \mathfrak{D}_3 \ ;$$

dann ist

$$D_1 = H_{3,2} \times H_{2,3} \ , \qquad D_3 = H_{2,1} \times H_{1,2} \ ,$$

wobei $H_{\lambda,\mu} < \mathfrak{H}_{\lambda,\mu}$. Man erhält

$$\textbf{(49)} \qquad D_1 D_3 = H_{2,1} \times H_{3,2} \cdot H_{1,2} \times H_{2,3} \ .$$

Es kommen also als $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3$-Komponenten alle möglichen Produkte $H_{2,1} \times H_{2,3}$ vor. Mithin ist

$$\textbf{(50)} \qquad (\mathfrak{D}_1 \ \mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{A}_2 \ , \ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{H}_{2,1} \times \mathfrak{H}_{2,3} \ .$$

Es sei

$$\textbf{(51)} \qquad D_1 D_3 < (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3 \ , \ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3) \ ;$$

das ist dann und nur dann der Fall, wenn in (49)

$$\textbf{(51) (a)} \qquad H_{3,2} \cdot H_{1,2} = E \qquad \text{oder} \qquad H_{3,2} = H_{1,2}^{-1} \ ,$$

mithin

$$H_{3,2} < (\mathfrak{H}_{3,2}\,,\ \mathfrak{H}_{1,2}) = \mathfrak{L}_2\ ,$$

ebenso $\mathfrak{H}_{1,2} < \mathfrak{L}_2$. Mit Rücksicht auf (15) und (24) muß auch $H_{2,1}$ in der $\mathfrak{L}_2$ durch den Isomorphismus II 3 zugeordneten Untergruppe von $\mathfrak{H}_{2,1}$ enthalten sein. Es ist also $H_{2,1} < \mathfrak{L}_1$, ebenso $H_{2,3} < \mathfrak{L}_3$. Es ist

$$(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3) < (\mathfrak{G}\,,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{D}_2\ ,$$

mithin

$$(52)\quad (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3) = (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3\ ,\ \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{D}_2)\ .$$

Es ist also, da unter der Voraussetzung (51) die Komponenten von $D_1 D_3$ in $\mathfrak{L}_1$ bzw. $\mathfrak{L}_3$ enthalten sind, nach (27)

$$(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3) < (\mathfrak{D}_2\ ,\ \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_3) = \mathfrak{N}_2 = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\Pi_2}{\times} \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\ .$$

Es ist

$$\mathfrak{C}_1 < \mathfrak{D}_3\,, \qquad \mathfrak{C}_3 < \mathfrak{D}_1\ ,$$

mithin

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_3 < (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3)\ .$$

Die Gruppe $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3)$ besteht also aus vollen Komplexen von $\dfrac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_3}$. Nun kann man aber in (49) $H_{2,1} < \mathfrak{L}_1$ beliebig wählen, $H_{1,2}$ so wählen, daß nach (15) und (24)

$$H_{2,1} \cdot \mathfrak{C}_1 \underset{\Pi_3}{\sim} H_{1,2} \cdot \mathfrak{C}_2\ ;$$

dann ist

$$H_{1,2} < \mathfrak{L}_2\,, \qquad \text{mithin} \qquad H_{1,2} < \mathfrak{H}_{3,2}\ .$$

Man setze $H_{3,2} = H_{1,2}^{-1}$ und wähle $H_{2,3}$ so, daß nach (15) und (24)

$$H_{3,2} \cdot \mathfrak{C}_2 \underset{\Pi_1}{\sim} H_{2,3} \cdot \mathfrak{C}_3\ ;$$

dann ist $H_{2,3} < \mathfrak{L}_3$. Es kommen also in $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3)$ sämtliche Elemente von $\mathfrak{L}_1$ als Komponenten vor, mithin ist

$$\textbf{(53)}\qquad (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3) = (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{N}_2\ .$$

Es ergibt sich also die dritte Darstellung von $\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3$:

$$\textbf{(54)}\qquad \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_3 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{C}_2} \underset{\Pi_2}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,1} \times \mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{N}_2} = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{C}_2} \underset{\Pi_2}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,1} \times \mathfrak{H}_{2,3}}{\dfrac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\Pi_2}{\times} \dfrac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}}\ .$$

Die soeben durchgeführten Betrachtungen liefern auch die Antwort auf folgende Frage:

Durch Anwendung von (24) auf die verschiedenen Indizes erhält man

$$\textbf{(55)}\qquad \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2} \underset{\Pi_3}{\sim} \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\Pi_2}{\sim} \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3} \underset{\Pi_1}{\sim} \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2}\ .$$

Auf was für einen Automorphismus von $\dfrac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2}$ führt (55)?

Es sei (51) erfüllt. Bei der Aufstellung von (49) beginne man mit einem beliebigen Element $H_{1,2} < \mathfrak{L}_2$; dann muß $H_{2,1}$ so gewählt werden, daß

$$(56)\qquad H_{2,1} \cdot \mathfrak{C}_1 \underset{\Pi_3}{\sim} H_{1,2}\, \mathfrak{C}_2\ .$$

Wenn $H_{1,2} \cdot \mathfrak{C}_2$ alle Komplexe von $\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2}$ durchläuft, durchläuft gleichzeitig $H_{2,1} \cdot \mathfrak{C}_1$ alle Komplexe von $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1}$. Da, wie bewiesen, $D_1 D_3 < \mathfrak{N}_2$, so muß $H_{2,3}$ so gewählt werden, daß

(57) $$H_{2,3} \cdot \mathfrak{C}_3 \,\tilde{\Pi}_2\, H_{2,1} \cdot \mathfrak{C}_1 ,$$

wobei $H_{2,3} \cdot \mathfrak{C}_3$ alle Komplexe von $\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$ durchläuft. Ferner ist

(58) $$H_{3,2} \cdot \mathfrak{C}_2 \,\tilde{\Pi}_1\, H_{2,3} \cdot \mathfrak{C}_3 .$$

Nun war aber wegen (51) (a)

$$H_{3,2} = H_{1,2}^{-1} .$$

Man erhält also nach (56), (57), (58)

(59) $$H_{1,2} \cdot \mathfrak{C}_2 \,\tilde{\Pi}_3\, H_{2,1} \cdot \mathfrak{C}_1 \,\tilde{\Pi}_2\, H_{2,3} \cdot \mathfrak{C}_3 \,\tilde{\Pi}_1\, H_{1,2}^{-1} \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Der gesuchte Automorphismus ist also

(60) $$H_{1,2} \cdot \mathfrak{C}_2 \sim H_{1,2}^{-1} \cdot \mathfrak{C}_2 .$$

Die Zuordnung zum reziproken Element ist nur für kommutative Gruppen ein Automorphismus, zu denen $\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2}$ nach (33) gehört. Dasselbe gilt für die Zuordnung von $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1}$ und $\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$ zu sich selbst.

Wenn

(60) (a) $$D_1 D_3 < \mathfrak{N}_2 ,$$

so waren die Komponenten von $\mathfrak{D}_1$ in $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$ enthalten; mithin ist nach (27)

(61) $$D_1 = H_{3,2} \times H_{2,3} < (\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) = \mathfrak{N}_1 ,$$

ebenso

(62) $$D_3 = H_{2,1} \times H_{1,2} < \mathfrak{N}_3 ,$$

mithin ist, da in der Form (60) (a) wegen (53) alle Elemente von $\mathfrak{N}_2$ darstellbar sind,

(63) $$\mathfrak{N}_2 < \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 ,$$

ebenso

$$\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 , \qquad \mathfrak{N}_3 < \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 .$$

Das Produkt $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3$ wird bereits durch je zwei seiner Faktoren erzeugt.

Es war nach (44)

(44) $$\frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1} \,\tilde{\Pi}_1\, \frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1} ;$$

ebenso ist

(64) $$\frac{\mathfrak{H}_{3,1}}{\mathfrak{C}_1} \,\tilde{\Pi}_1\, \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1} .$$

Also ordnet der Isomorphismus III 1 auch die Durchschnitte der beiden Gruppen einander zu, d. h. es ist unter Benutzung von (6), (30) und (31)

(65) $$\frac{(\mathfrak{H}_{2,1} , \mathfrak{H}_{3,1})}{\mathfrak{C}_1} = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \,\tilde{\Pi}_1\, \frac{(\mathfrak{Q}_{1,2} , \mathfrak{Q}_{1,3})}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{D}_1 \cdot (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3)}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{L}_2} \times \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{L}_3}}{\frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{C}_2} \,\tilde{\Pi}_1\, \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{C}_3}} .$$

Bildet man das meromorphe Produkt, so erhält man mit Rücksicht auf (43)

$$\textbf{(66)}\quad \begin{cases} (\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ , \ \mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_1) = \dfrac{(\mathfrak{Q}_{1,2} \cdot \mathfrak{Q}_{1,3})}{\mathfrak{D}_1} \underset{\mathfrak{M}_1}{\times} \dfrac{(\mathfrak{H}_{2,1} \, , \, \mathfrak{H}_{3,1})}{\mathfrak{C}_1} \\ = \dfrac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1} \underset{\mathfrak{M}_1}{\times} \dfrac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} = (\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) \ , \end{cases}$$

da es sich um alle Elemente von $\mathfrak{G}$ handelt, deren $\mathfrak{A}_1$-Komponente in $\mathfrak{L}_1$ enthalten ist.

Analog wie bei der Behandlung von $\frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}$ mögen diejenigen Elemente betrachtet werden, die $\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1}$ mit $\mathfrak{A}_2$ gemeinsam hat. Es ist nach (30)

$$(\mathfrak{R}_1 \, , \, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{L}_2 \ , \qquad (\mathfrak{D}_1 \, , \, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{C}_2 \ .$$

Es ist ferner nach (27)

$$\textbf{(67)}\qquad \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{R}_1 < \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{D}_1 \ ,$$

mithin

$$(\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{D}_1 < \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{D}_1 \ ;$$

da andrerseits

$$\mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{D}_1 < (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{D}_1 \ ,$$

so ist

$$\textbf{(67) (a)}\qquad \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{R}_1 \ .$$

Es ist ferner

$$(\mathfrak{L}_2 \, , \, \mathfrak{D}_1) < (\mathfrak{A}_2 \, , \, \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{C}_2 \ .$$

Andrerseits ist

$$\mathfrak{C}_2 < \mathfrak{L}_2 \, , \quad \mathfrak{C}_2 < \mathfrak{D}_1 \ ,$$

mithin

$$\mathfrak{C}_2 < (\mathfrak{L}_2 \, , \, \mathfrak{D}_1) \ ,$$

also

$$\textbf{(67) (b)}\qquad (\mathfrak{L}_2 \, , \, \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{C}_2 \ .$$

Es ist nach Hilfssatz I

$$\textbf{(67) (c)}\qquad \frac{\mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}_1} \gtrsim \frac{\mathfrak{L}_2}{(\mathfrak{L}_2 \, , \, \mathfrak{D}_1)} \ ,$$

also

$$\textbf{(68)}\qquad \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2} \lesssim \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1} \ .$$

Da nach (30) $(\mathfrak{R}_1 \, , \, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{L}_2$, nach (15) $(\mathfrak{D}_1 \, , \, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{C}_2$, so erhält man

$$\textbf{(69)}\qquad \left(\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\mathfrak{M}_1}{\times} \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1} , \ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \right) = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\mathfrak{M}_3}{\times} \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2} = \mathfrak{N}_3 \ ;$$

und man erhält wegen (67) (c) die Gruppe $\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \underset{\mathfrak{M}_1}{\times} \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1}$, dadurch daß man die rechte Seite von (69) mit $\mathfrak{D}_1$ multipliziert. Es ist also wegen (66)

$$\textbf{(70)}\qquad (\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) = (\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ , \ \mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{N}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 \ .$$

Da $\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{D}_1$, so ist mit Rücksicht auf (63)

$$\textbf{(71)}\qquad \mathfrak{N}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_1 \, \mathfrak{N}_2 \, \mathfrak{N}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{D}_1 \ .$$

Es war

$$(31)\qquad (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3)\cdot \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{R}_1\,, \qquad (27)\quad (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3\ ,\ \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{N}_1\,;$$

mithin

$$(72)\qquad \frac{\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3}{\mathfrak{N}_1} \lesssim \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{D}_1}\,;$$

also unter Benutzung von (70)

$$(73)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{C}_1} \times \dfrac{\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3}{\mathfrak{N}_1} = (\mathfrak{G}\ ,\ \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \\ = (\mathfrak{G}\ ,\ \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) = (\mathfrak{N}_3 \cdot \mathfrak{D}_1\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) = \mathfrak{N}^*\,, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{N}^*$ zur Abkürzung eingeführt ist. Es sind nämlich diejenigen Elemente von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3)$, deren $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente in $\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3$ enthalten ist. Es sei

$$N_3 < \mathfrak{N}_3\,, \qquad D_1 < \mathfrak{D}_1\,, \qquad N_3 \cdot D_1 < \mathfrak{N}^*\,.$$

Dann ist

$$N_3 \cdot D_1 < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3\,.$$

Es ist

$$N_3 < \mathfrak{N}_3 < \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3\,;$$

mithin ist auch

$$D_1 < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3\,;$$

da $\mathfrak{D}_1 < \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$, so ist

$$D_1 < \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3\,; \qquad \text{also} \qquad D_1 < (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) = \mathfrak{N}_1\,;$$

mithin $N_3 D_1 < \mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_1$. Es ist also $\mathfrak{N}^* < \mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_1$. Da andrerseits $\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_3 \mathfrak{D}_1$ und

$$\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_1 < \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3\,,$$

so ist $\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}^*$; folglich nach (63)

$$\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3\,.$$

Es ist also

$$(74)\qquad (\mathfrak{G}, \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3\,.$$

Aus (73) folgt, daß wenn die $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente eines Elementes von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3$ angehört, daß dann auch die $\mathfrak{A}_1$-Komponente $\mathfrak{L}_1$ angehört. Es ist also

$$(75)\qquad (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3\,.$$

Aus (75) und (70) folgt

$$(76)\quad \begin{cases} \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \\ = (\mathfrak{G}\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{L}_3\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{A}_3) \\ = \big((\mathfrak{G}\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{L}_3)\ ,\ (\mathfrak{G}\ ,\ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{A}_3)\big) \\ = \big((\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3)\ ,\ (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_2)\big) \\ = (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2\ ,\ \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_3\ ,\ \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3)\,. \end{cases}$$

Es ist nach (44)

$$\frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1} \overset{\text{III}\,1}{\sim} \frac{\mathfrak{Q}_{1,2}}{\mathfrak{D}_1}\,, \qquad \text{ebenso} \qquad \frac{\mathfrak{H}_{3,1}}{\mathfrak{C}_1} \overset{\text{III}\,1}{\sim} \frac{\mathfrak{Q}_{1,3}}{\mathfrak{D}_1}\,;$$

also ordnet der Isomorphismus III 1 auch die Produkte einander zu. Mit Rücksicht auf (7) und (28) erhält man

$$(77)\qquad \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{C}_1} \overset{\text{III}\,1}{\sim} \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{D}_1}\,.$$

Auf Grund von (8) liefert

$$\mathfrak{D}^* = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{C}_1} \times_{\mathfrak{III}_1} \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{D}_1} , \tag{78}$$

worin $\mathfrak{D}^*$ zur Abkürzung eingeführt ist, sämtliche Elemente von $\mathfrak{G}$ mit der $\mathfrak{A}_1$-Komponente $\mathfrak{M}_1$. D. h. es ist

$$\mathfrak{D}^* = (\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) . \tag{79}$$

Es ist nach DUDP Satz I

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1} \mathfrak{III}_1 \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} , \tag{80}$$

worin das Zeichen $\mathfrak{III}_1$ in erweitertem Sinne gebraucht ist. Dieser Isomorphismus enthält den Isomorphismus

$$\frac{\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1} \mathfrak{III}_1 \frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{C}_1} . \tag{81}$$

Im Zähler links steht wegen (43) die Untergruppe aller derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, deren $\mathfrak{A}_1$-Komponente in $\mathfrak{H}_{2,1}$ enthalten ist. Analog erhält man

$$\frac{\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1} \mathfrak{III}_1 \frac{\mathfrak{H}_{3,1}}{\mathfrak{C}_1} , \tag{82}$$

also auch den durch Multiplikation gebildeten Isomorphismus

$$\frac{(\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_1)}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1} \mathfrak{III}_1 \frac{\mathfrak{H}_{2,1} \cdot \mathfrak{H}_{3,1}}{\mathfrak{C}_1} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{C}_1} . \tag{83}$$

Mithin ist wegen (78)

$$\frac{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{D}^*}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1} , \tag{84}$$

also

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}^* . \tag{85}$$

Da die linke Seite in bezug auf die Indizes 1, 2, 3 symmetrisch ist, so gilt (79) auch mit vertauschten Indizes. Es ist also

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 = (\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3 \ , \ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{A}_3 \ , \ \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{M}_3) \\ \qquad\qquad = (\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3) = (\mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{M}^{\times}) , \end{array} \right. \tag{86}$$

wo $\mathfrak{M}^{\times}$ zur Abkürzung eingeführt ist. (78) lautet mit Rücksicht auf (28) und (15) ausführlich

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}^* = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{C}_1} \times_{\mathfrak{III}_1} \frac{\dfrac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \times_{\mathfrak{\Gamma}_1} \dfrac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}}}{\dfrac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{C}_2} \times_{\mathfrak{\Pi}_1} \dfrac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{C}_3}} . \tag{87}$$

Nach (12) ist

$$\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \mathfrak{\Gamma}_1 \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}} ; \tag{88}$$

es war

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \mathfrak{\Gamma}_1 \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}} ; \tag{26}$$

hiernach kann man in erweiterter Bedeutung des Zeichens $\mathfrak{\Gamma}_1$ schreiben

(89) $$\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{M}_2} \widetilde{\mathfrak{I}1} \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{M}_3} .$$

Was für ein Automorphismus wird durch

(90) $$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{M}_1} \widetilde{\mathfrak{I}3} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{M}_2} \widetilde{\mathfrak{I}1} \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{M}_3} \widetilde{\mathfrak{I}2} \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{M}_1}$$

bewirkt?

Es sei

$$G = B_1 \times B_2 \times B_3 < \mathfrak{G}$$

irgendein Element. Dann ist

$$B_2 \times B_3 < \mathfrak{K}_1$$

als $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente. Es ist also nach (12)

(91) $$B_2 \cdot \mathfrak{H}_{1,2} \widetilde{\mathfrak{I}1} B_3 \cdot \mathfrak{H}_{1,3} ,$$

also nach (26) auch

(92) $$B_2 \cdot \mathfrak{M}_2 \widetilde{\mathfrak{I}1} B_3 \cdot \mathfrak{M}_3 ,$$

wobei der Isomorphismus $\widetilde{\mathfrak{I}1}$ im erweiterten Sinne zu verstehen ist. Ebenso ist aber für je zwei Komponenten von G

(93) $$B_1 \cdot \mathfrak{M}_1 \widetilde{\mathfrak{I}2} B_3 \cdot \mathfrak{M}_3 ,$$

(94) $$B_1 \cdot \mathfrak{M}_1 \widetilde{\mathfrak{I}3} B_2 \cdot \mathfrak{M}_2 ;$$

also

(95) $$B_1 \cdot \mathfrak{M}_1 \widetilde{\mathfrak{I}3} B_2 \cdot \mathfrak{M}_2 \widetilde{\mathfrak{I}1} B_3 \cdot \mathfrak{M}_3 \widetilde{\mathfrak{I}2} B_1 \cdot \mathfrak{M}_1 .$$

Der durch (90) vermittelte Automorphismus von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{M}_1}$ ist also der identische Automorphismus. Durch Multiplikation von je 3 einander zugeordneten Komplexen entsteht das meromorphe Produkt dreier Faktoren

(96) $$\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{M}_1} \underset{\mathfrak{I}}{\times} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{M}_2} \underset{\mathfrak{I}}{\times} \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{M}_3} .$$

Es ist wegen (92) bis (95) $\mathfrak{G} < \mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$, ebenso $\mathfrak{M}^{\times} < \mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$, also $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{M}^{\times} < \mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$. Andrerseits enthält wegen (92) bis (95) jeder Komplex von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$ Elemente von $\mathfrak{G}$, ist also von der Form $G \cdot \mathfrak{M}^{\times}$, mithin $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}} < \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{M}^{\times}$, also $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{M}^{\times}$, oder ausführlich

(97) $$\mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3) = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{M}_1} \underset{\mathfrak{I}}{\times} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{M}_2} \underset{\mathfrak{I}}{\times} \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{M}_3} .$$

Es ist wegen (27)

(98) $$\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_3 ,$$

(99) $$\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_3 \cdot \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 ;$$

mithin ist wegen $\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{D}_1 < \mathfrak{G}$

$$\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G} > \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 ,$$

$$(\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{G} < \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G} ;$$

da umgekehrt

$$\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G} < (\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{G} ,$$

so ist

(100) $$\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G} = (\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{G} ,$$

also

$$(101) \qquad \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{L}_3 \cdot \mathfrak{G} \ .$$

Es ist

$$(102) \qquad \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{G} \ , \qquad \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{G} \ , \qquad \mathfrak{L}_3 \cdot \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_3 \cdot \mathfrak{G} \ ;$$

mithin

$$(103) \qquad (\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{G} < (\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{A}_3 \cdot \mathfrak{G}) \ .$$

Es möge die linke Seite von (103) provisorisch mit $\overline{\mathfrak{G}}$, die rechte Seite mit $\overline{\mathfrak{G}'}$ bezeichnet werden. Es soll gezeigt werden, daß $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}'}$. Es hat $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G}$ die gleiche $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente wie $\mathfrak{G}$, nämlich $\mathfrak{K}_1$. Es sei $L_1 < \mathfrak{L}_1$, $G < \mathfrak{G}$; ferner sei $L_1 G < (\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1)$ ein beliebiges Element dieses Durchschnittes; also $L_1 G < \mathfrak{A}_1$. Da $L_1 < \mathfrak{L}_1 < \mathfrak{A}_1$, so muß auch $G < \mathfrak{A}_1$ sein, d. h.

$$G < (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{C}_1 < \mathfrak{L}_1 \ ;$$

mithin $L_1 G < \mathfrak{L}_1$, also

$$(\mathfrak{L}_1 \mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{L}_1 \ .$$

Es ist die $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente von $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{G}$ gleich

$$(\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{G}, \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{K}_1 \ ;$$

da $\overline{\mathfrak{G}'} < \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{G}$, so wäre

$$(\mathfrak{A}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}'}, \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) < \mathfrak{K}_1 \ ;$$

da aber $\overline{\mathfrak{G}'} > \mathfrak{G}$, so ist

$$(\mathfrak{A}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}'}, \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) > (\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{G} \ , \ \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{K}_1 \ ;$$

mithin

$$(104) \qquad (\mathfrak{A}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}'}, \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{K}_1 \ .$$

Es ist

$$(105) \quad \begin{cases} (\overline{\mathfrak{G}'}, \mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_1 \ , \ \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_2 \ , \ \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_3 \ , \ \mathfrak{A}_1) \\ = \big(\mathfrak{A}_1 \ , \ (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) \ , \ (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_1)\big) = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{H}_{2,1}, \mathfrak{H}_{3,1}) = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}_1) = \mathfrak{L}_1 \ . \end{cases}$$

Es ist also nach Korollar I a zu DUDP Satz I

$$\operatorname{Ord} \overline{\mathfrak{G}} = \operatorname{Ord} \mathfrak{L}_1 \cdot \operatorname{Ord} \mathfrak{K}_1 \ ,$$

ebenso

$$\operatorname{Ord} \overline{\mathfrak{G}'} = \operatorname{Ord} \mathfrak{L}_1 \cdot \operatorname{Ord} \mathfrak{K}_1 \ ;$$

also

$$\operatorname{Ord} \overline{\mathfrak{G}} = \operatorname{Ord} \overline{\mathfrak{G}'} \ .$$

Da außerdem nach (103) $\overline{\mathfrak{G}} < \overline{\mathfrak{G}'}$, so ist $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}'}$, oder ausführlicher

$$\mathbf{(106)} \qquad (\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{A}_1 \ , \ \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_2 \ , \ \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}_3) \ .$$

Es ist

$$\mathfrak{H}_{2,1} <^i \mathfrak{B}_1 \ , \qquad \mathfrak{H}_{3,1} <^i \mathfrak{B}_1 \ ,$$

mithin

$$(107) \quad \mathfrak{L}_1 = (\mathfrak{H}_{2,1}, \mathfrak{H}_{3,1}) <^i \mathfrak{B}_1 \ ; \qquad \text{ebenso} \qquad \mathfrak{L}_2 <^i \mathfrak{B}_2 \ , \qquad \mathfrak{L}_3 <^i \mathfrak{B}_3 \ ;$$

also

$$(108) \qquad \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 <^i \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3 \ .$$

Da

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3 ,$$

so ist nach Hilfssatz I mit Rücksicht auf (74)

$$\textbf{(109)} \qquad \frac{(\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3} \simeq \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3} .$$

§ 3.

In diesem Paragraphen wollen wir die Konstitution der beiden isomorphen Faktorgruppen in (109) genauer kennen lernen und hierzu auch den bisher nicht benutzten DUDP § 2 heranziehen. Wir setzen zur Abkürzung

$$(110) \qquad \mathfrak{L}^{\times} = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 ,$$

$$\mathfrak{N}^{*} = \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 ;$$

dann lautet (109)

$$(112) \qquad \frac{\mathfrak{L}^{\times} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{L}^{\times}} \simeq \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}^{*}} .$$

Es ist

$$(113) \qquad \frac{\mathfrak{L}^{\times} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{L}^{\times}} < \frac{\mathfrak{L}^{\times} \cdot (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3)}{\mathfrak{L}^{\times}} = \frac{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3}{\mathfrak{L}^{\times}} .$$

Die rechte Seite ist isomorph

$$(114) \qquad \overline{\mathfrak{B}}_1 \times \overline{\mathfrak{B}}_2 \times \overline{\mathfrak{B}}_3 ,$$

worin

$$(115) \qquad \overline{\mathfrak{B}}_\nu \sim \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{L}_\nu} \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3 .$$

Setzt man entsprechend

$$(116) \qquad \frac{\mathfrak{H}_{\mu,\nu}}{\mathfrak{L}_\nu} \sim \overline{\mathfrak{H}}_{\mu,\nu} < \overline{\mathfrak{B}}_\nu ,$$

so ist

$$(117) \qquad (\overline{\mathfrak{H}}_{2,1}, \overline{\mathfrak{H}}_{3,1}) \sim \left(\frac{\mathfrak{H}_{2,1}}{\mathfrak{L}_1}, \frac{\mathfrak{H}_{3,1}}{\mathfrak{L}_1}\right) = \frac{(\mathfrak{H}_{2,1}, \mathfrak{H}_{3,1})}{\mathfrak{L}_1} = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_1} ,$$

mithin

$$(118) \qquad (\overline{\mathfrak{H}}_{2,1}, \overline{\mathfrak{H}}_{3,1}) = \overline{\mathfrak{E}} ,$$

wo $\overline{\mathfrak{E}}$ die aus dem Einheitselement bestehende Untergruppe von $\overline{\mathfrak{B}}_1$ bedeutet. Das Produkt $\overline{\mathfrak{H}}_{2,1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{3,1}$ ist also als Produkt teilerfremder invarianter Untergruppen nach einem bekannten Hilfssatze ein direktes. Dann ist nach DUDP Satz IV $\overline{\mathfrak{B}}_1$ als meromorphes Produkt zweier Faktoren darstellbar:

$$(119) \qquad \overline{\mathfrak{B}}_1 \simeq \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_{2,1}}{\widehat{\mathfrak{H}}_{2,1}} \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_{3,1}}{\widehat{\mathfrak{H}}_{3,1}} .$$

Hierin ist

$$(120) \qquad \widehat{\mathfrak{B}}_{2,1} \sim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{H}}_{3,1}} \sim \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{H}_{3,1}}, \qquad \widehat{\mathfrak{B}}_{3,1} \sim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{\overline{\mathfrak{H}}_{2,1}} \sim \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{H}_{2,1}} ,$$

so daß also

$$\overline{\mathfrak{H}}_{2,1} \approx \widehat{\mathfrak{H}}_{2,1}, \qquad \overline{\mathfrak{H}}_{3,1} \approx \widehat{\mathfrak{H}}_{3,1}. \tag{121}$$

Denkt man sich $\overline{\mathfrak{B}}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}_2$, $\overline{\mathfrak{B}}_3$ in dieser Weise als meromorphe Produkte dargestellt, so ist

$$\frac{\mathfrak{L}^{\times} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{L}^{\times}} \sim \overline{\mathfrak{G}} < \overline{\mathfrak{B}}_1 \times \overline{\mathfrak{B}}_2 \times \overline{\mathfrak{B}}_3 \tag{122}$$

dargestellt als Untergruppe eines direkten Produktes von 6 Faktoren.

Kommt eine $\mathfrak{A}_2$-Komponente mit einer $\mathfrak{A}_3$-Komponente zusammen als Komponente eines Elementes von $\mathfrak{G}$ vor, so ist ihr Produkt eine $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$-Komponente, also in $\mathfrak{R}_1$ enthalten. Mithin gehören sie solchen Komplexen an, die nach (12) durch den Isomorphismus

$$\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \overset{\Pi}{\sim} \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}} \tag{123}$$

verbunden sind. Jedes Element von $\widehat{\mathfrak{B}}_{3,2}$ ist Komponente aller Elemente der durch den Isomorphismus (120) zugeordneten Komplexe von $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{H}}_{1,2}}$, denen wieder die Komplexe von $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}}$ entsprechen; diese kommen nur mit den Elementen der durch (123) zugeordneten Komplexe von $\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}}$ zusammen als Komponenten vor, denen wieder durch (120) die Komplexe von $\frac{\overline{\mathfrak{B}}_3}{\overline{\mathfrak{H}}_{1,3}}$ und die Elemente von $\widehat{\mathfrak{B}}_{2,3}$ entsprechen. Es folgt also aus (120) und (123)

$$\widehat{\mathfrak{B}}_{3,2} \sim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{\overline{\mathfrak{H}}_{1,2}} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \overset{\Pi}{\sim} \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{B}}_3}{\overline{\mathfrak{H}}_{1,3}} \sim \widehat{\mathfrak{B}}_{2,3}, \tag{124}$$

mithin

$$\widehat{\mathfrak{B}}_{3,2} \sim \widehat{\mathfrak{B}}_{2,3}, \tag{125}$$

und es kommen nur Komponenten zusammen vor, die durch den Isomorphismus (125) miteinander verbunden sind. Wir können uns also anstatt der 6 Komponenten $\widehat{\mathfrak{B}}_{\mu,\nu}$ 3 Komponenten geschrieben denken, da je 2 der 6 Komponenten elementweise gekoppelt sind. (124) enthält für $\widehat{\mathfrak{H}}_{3,2} < \widehat{\mathfrak{B}}_{3,2}$ den Isomorphismus

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{3,2} \sim \frac{\overline{\mathfrak{H}}_{3,2} \times \overline{\mathfrak{H}}_{1,2}}{\overline{\mathfrak{H}}_{1,2}} \sim \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_{1,2}} \overset{\Pi}{\sim} \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{H}_{1,3}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{H}}_{2,3} \times \overline{\mathfrak{H}}_{1,3}}{\overline{\mathfrak{H}}_{1,3}} \sim \widehat{\mathfrak{H}}_{2,3}. \tag{126}$$

Mithin enthält (125) den Isomorphismus

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{3,2} \sim \widehat{\mathfrak{H}}_{2,3}. \tag{127}$$

((128) bis (131) sind fortgefallen.)

Es ist

$$\mathfrak{L}^{\times} \cdot \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{L}_1 \times ((\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{R}_1, \tag{132}$$

also mit Rücksicht auf (30) und (31)

$$\frac{\mathfrak{L}^{\times} \cdot \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{L}^{\times}} = \frac{\mathfrak{L}_1 \times \left(\frac{\mathfrak{H}_{3,2}}{\mathfrak{L}_2} \overset{\Pi}{\times} \frac{\mathfrak{H}_{2,3}}{\mathfrak{L}_3} \right)}{\mathfrak{L}_1 \times (\mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3)} \sim \frac{\overline{\mathfrak{H}}_{3,2}}{\overline{\mathfrak{E}}} \overset{\Pi}{\times} \frac{\overline{\mathfrak{H}}_{2,3}}{\overline{\mathfrak{E}}}; \tag{133}$$

d. h. die Elemente von $\overline{\mathfrak{H}}_{3,2}$ und $\overline{\mathfrak{H}}_{2,3}$ werden durch den im verallgemeinerten Sinne verstandenen Isomorphismus II 1 einander zugeordnet und nur zugeordnete Elemente werden paarweise miteinander multipliziert, eine Bildung, die man analog dem meromorphen Produkte isomorphes Produkt nennen könnte. Bei der Darstellung durch die $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$ entspricht dem wegen (121) das isomorphe Produkt von $\widehat{\mathfrak{H}}_{3,2}$ und $\widehat{\mathfrak{H}}_{2,3}$. Es ist $\mathfrak{D}_1 < \mathfrak{G}$. Bei der Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$ kommen die Komponenten nur durch den Isomorphismus (125) verbunden vor, der den Isomorphismus (127) enthält. Es muß also (127) mit dem Isomorphismus

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{3,2} \,\widehat{\pi}_1\, \widehat{\mathfrak{H}}_{2,3} \tag{134}$$

identisch sein.

Wir wollen jetzt die Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$ dadurch vereinfachen, daß wir anstatt der 6 Komponenten $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu,\nu}$ nur noch 3 Komponenten schreiben. An Stelle je zweier elementweise durch (125) gekoppelter Komponenten schreiben wir nur noch eine einzige Komponente

$$\widehat{\mathfrak{B}}_{3,2} \sim \widehat{\mathfrak{B}}_{2,3} \sim \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{32} \,, \tag{135}$$

wobei wir

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{32} = \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{23}$$

annehmen. Es wird

$$\frac{\mathfrak{L}^{\times}\,\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}^{\times}} \sim \overline{\mathfrak{G}} \approx\!\!\approx \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} < \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{23} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{31} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{12} \,. \tag{136}$$

Hierin ist

$$\frac{\mathfrak{L}^{\times}\,\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{L}^{\times}} \sim \overline{\mathfrak{D}}_1 \approx\!\!\approx \widehat{\widehat{\mathfrak{D}}}_1 = \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{23} \,, \tag{137}$$

worin

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{23} <_i \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{23} \,. \tag{138}$$

Die drei Untergruppen $\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{\mu\nu}$ kommen in $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ vor; also enthält $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ auch das direkte Produkt

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{23} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{31} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{12} <_i \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} \,. \tag{139}$$

Es kommen also in $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ nur volle Komplexe von $\frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{23}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{23}}$ elementweise multipliziert mit vollen Komplexen $\frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{31}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{31}}$ und von $\frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{12}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{12}}$ vor.

Es sei $\widehat{\widehat{G}} < \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ ein Element,

$$\widehat{\widehat{G}} = \widehat{\widehat{B}}_{23} \times \widehat{\widehat{B}}_{31} \times \widehat{\widehat{B}}_{12} \tag{140}$$

seine Komponentendarstellung nach (136). Dann ist

$$\widehat{\widehat{B}}_{23} \cdot \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{23} \times \widehat{\widehat{B}}_{31} \cdot \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{31} \times \widehat{\widehat{B}}_{12} \cdot \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{12} < \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} \,. \tag{141}$$

Kehrt man zur Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$ durch 6 Komponenten zurück, so treten wegen der eindeutigen Koppelung z. B. die $\widehat{\mathfrak{B}}_{2,1}$- und die $\widehat{\mathfrak{B}}_{3,1}$-Komponenten

$$\widehat{B}_{2,1} \cdot \widehat{\mathfrak{H}}_{2,1} \times \widehat{B}_{3,1} \cdot \widehat{\mathfrak{H}}_{3,1} \tag{142}$$

zusammen auf. Diese müssen die $\overline{\mathfrak{B}}_1$-Komponente eines Elementes von $\overline{\mathfrak{G}}$ nach (119) darstellen. Also müssen die Komplexe

$$\widehat{B}_{2,1} \cdot \widehat{\mathfrak{H}}_{2,1} \sim \widehat{B}_{3,1} \cdot \widehat{\mathfrak{H}}_{3,1} \tag{143}$$

durch (119) eineindeutig einander zugeordnet sein. Der Komplex $\widehat{\widehat{B}}_{12} \cdot \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{12}$ kommt also nur mit einem wohlbestimmten Komplex $\widehat{\widehat{B}}_{31} \cdot \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{31}$ multipliziert vor, ebenso mit einem wohlbestimmten Komplex $\widehat{\widehat{B}}_{23} \cdot \widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{23}$. Die beiden letzten Komplexe kommen also auch miteinander multipliziert vor, und die isomorphe Zuordnung

$$\widehat{B}_{1,3} \cdot \widehat{\mathfrak{H}}_{1,3} \sim \widehat{B}_{2,3} \cdot \widehat{\mathfrak{H}}_{2,3}$$

die (119), angewendet auf $\overline{\mathfrak{B}}_3$, liefern würde, muß wieder dieselbe Zuordnung der $\widehat{\approx}$-Komplexe liefern. Wir erhalten $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ als meromorphes Produkt dreier Faktoren, d. h. zwischen drei Faktorgruppen besteht ein wohlbestimmter Isomorphismus und es werden nur je 3 durch diesen Isomorphismus einander zugeordnete Komplexe elementweise miteinander multipliziert:

$$\frac{\mathfrak{L}^{\times} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{L}^{\times}} \sim \overline{\mathfrak{G}} \,\widehat{\approx}\, \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} = \frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{23}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{23}} \times \frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{31}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{31}} \times \frac{\widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_{12}}{\widehat{\widehat{\mathfrak{H}}}_{12}} \; ; \tag{144}$$

wegen (112) ist auch

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}^*} \sim \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} \; , \tag{144) (a}$$

was zu beweisen war.

Wir gehen zu einer weiteren Anwendung von DUDP § 2 über.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ seien drei beliebige invariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Setzen wir

$$(\mathfrak{D}_3 \, , \mathfrak{D}_2 \, , \mathfrak{D}_3) = \mathfrak{D}^{**} \; , \tag{145}$$

so ist nach DUDP § 2 Satz III

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}^{**}} \,\widehat{\approx}\, \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \widehat{\mathfrak{B}}_3 \; , \tag{146}$$

worin

$$\widehat{\mathfrak{B}}_{\nu} \,\widetilde{\nu}\, \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_{\nu}} \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3 \; . \tag{147}$$

Den Komplexen von $\mathfrak{D}_1$ nach $\mathfrak{D}^{**}$ entsprechen alle Elemente, deren $\widehat{\mathfrak{B}}_1$-Komponente gleich $\widehat{E}$ ist, mithin ist

$$\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}^{**}} \,\widehat{\approx}\, \widehat{\mathfrak{D}}_1 = (\widehat{\mathfrak{G}} \, , \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \widehat{\mathfrak{B}}_3) \; . \tag{148}$$

Es ist die Blockkomponente

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}^{**}} \,\widehat{\approx}\, \widehat{\mathfrak{C}}_1 = (\widehat{\mathfrak{G}} \, , \widehat{\mathfrak{B}}_1) \; . \tag{149}$$

Es ist

$$\widehat{\mathfrak{C}}_1 = (\mathfrak{G} \, , \widehat{\mathfrak{B}}_1) = \big((\widehat{\mathfrak{G}} \, , \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2) \;\; , \;\; (\widehat{\mathfrak{G}} \, , \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_3)\big) = (\widehat{\mathfrak{D}}_2 \, , \widehat{\mathfrak{D}}_3) \; , \tag{150}$$

also

$$\frac{(\mathfrak{D}_2 \, , \mathfrak{D}_3)}{\mathfrak{D}^{**}} \,\widehat{\approx}\, \widehat{\mathfrak{C}}_1 \; . \tag{150) (a}$$

Die mit $\widehat{\ }$ versehenen Komponenten spielen hier genau dieselbe Rolle wie die entsprechenden Komponenten in den bisherigen Paragraphen. Es ist also nach (53)

$$(\widehat{\mathfrak{D}}_2 \cdot \widehat{\mathfrak{D}}_3 , \widehat{\mathfrak{D}}_1) = \widehat{\mathfrak{N}}_1 , \tag{151}$$

$$\frac{(\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)}{\mathfrak{D}^{**}} \approx \widehat{\mathfrak{N}}_1 . \tag{152}$$

Mit Rücksicht auf (27) ist

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_2 \times \widehat{\mathfrak{C}}_3} \sim \frac{\widehat{\mathfrak{L}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2} . \tag{153}$$

Die Faktorgruppen in (153) sind kommutativ wegen (33). Unter Benutzung von (55) folgt aus (153)

$$\frac{\widehat{\mathfrak{N}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_2 \times \widehat{\mathfrak{C}}_3} \sim \frac{\widehat{\mathfrak{N}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_3 \times \widehat{\mathfrak{C}}_1} \sim \frac{\widehat{\mathfrak{N}}_3}{\widehat{\mathfrak{C}}_1 \times \widehat{\mathfrak{C}}_2} . \tag{154}$$

Wegen (151) und (150) ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\widehat{\mathfrak{N}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_2 \times \widehat{\mathfrak{C}}_3} = \dfrac{(\widehat{\mathfrak{D}}_2 \cdot \widehat{\mathfrak{D}}_3 , \widehat{\mathfrak{D}}_1)}{(\widehat{\mathfrak{D}}_2 , \widehat{\mathfrak{D}}_1) \times (\widehat{\mathfrak{D}}_3 , \widehat{\mathfrak{D}}_1)} \\ \sim \dfrac{\left(\dfrac{(\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)}{\mathfrak{D}^{**}}\right)}{\left(\dfrac{(\mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)}{\mathfrak{D}^{**}}\right)} \sim \dfrac{(\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)}{(\mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)} , \end{array} \right. \tag{155}$$

also nach (154)

$$\frac{(\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)}{(\mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)} \sim \frac{(\mathfrak{D}_3 \cdot \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2)}{(\mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_2) \cdot (\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2)} \sim \frac{(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_3)}{(\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_3) \cdot (\mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_3)} . \tag{156}$$

Wir sind also zu folgendem Satze gelangt, der seinem Inhalte nach von der Theorie der subdirekten Produkte frei ist:

Satz VII: *Wenn*

$$\mathfrak{D}_1 <_i \mathfrak{G} , \qquad \mathfrak{D}_2 <_i \mathfrak{G} , \qquad \mathfrak{D}_3 <_i \mathfrak{G} ,$$

so ist die Faktorgruppe

$$\frac{(\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)}{(\mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_1)}$$

immer kommutativ und isomorph den beiden anderen durch Vertauschung von $\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_3$ *aus ihr entstehenden Faktorgruppen.*

Eingegangen 3. August 1929.

Theorie der *s*-Funktion.

Von *W. Maier* in Frankfurt a. M.

Inhaltsübersicht.

Seite
Einleitung 101
§ 1. Frühere Ergebnisse 101
§ 2. Der Additionssatz 104
§ 3. Geometrische Deutung 105
§ 4. Orthogonalität im Funktionenraum 108
§ 5. Anknüpfung an die $\wp$-Funktion 110
§ 6. Zur Multiplikation der *s*-Funktion 111
§ 7. Konstruktion von Modulfunktionen 113

Einleitung.

Die von L. Kronecker betrachtete Funktion $s\begin{pmatrix} x, & y \\ u; & \omega_1, \omega_2 \end{pmatrix}$ führt nicht nur zum rationellen Aufbau [1]) der elliptischen sowie der Modulfunktionen einer Veränderlichen, sondern sie führt inhaltlich und methodisch über die klassische Theorie von Weierstraß hinaus. Inhaltlich durch neue Ergebnisse wie die Orthogonalität der *s*-Funktion, welche die belastete Orthogonalität der Jacobischen ϑ-Funktion nach sich zieht. Methodisch durch Verknüpfung dieser Tatsachen, die zunächst dem Gedankenkreis der Laméschen Differentialgleichung angehören, mit geometrischen Operationen im dreidimensionalen Raum, weiterhin mit der Theorie der Differenzengleichungen und analytischen Funktionen zweier Argumente.

Die nachstehenden §§ 1—7 bringen im Abriß solche Erscheinungen im Gebiet der *s*-Funktion zur Darstellung, die zu bekannten Aussagen über orthogonale Funktionensysteme (§§ 3—4) parallel laufen. An Stelle des algebraischen Additionstheorems, dessen zentrale Bedeutung für die doppeltperiodischen Funktionen durch Weierstraß herausgestellt wurde, tritt ferner ein quadratischer „Additionssatz", der Argumententripel transformiert (§ 2) und die *s*-Funktion kennzeichnet. Aus ihm läßt sich algebraisch die Multiplikationstheorie der *s*-Funktion entwickeln (§ 6), während in § 7 unmittelbar auf die Doppelreihen zurückgegriffen wird, um daraus entsprechend dem Vorgang von Eisenstein und Hurwitz die Modulfunktionen zu konstruieren. Deren Transformation wird durch die benutzte Erzeugungsweise in Evidenz gesetzt.

§ 1. Frühere Ergebnisse.

Zwei komplexe „Perioden" ω_1, ω_2 seien den Ungleichungen unterworfen:

$$0 < |\omega_1|, \qquad 0 < \left|\Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right|. \tag{1}$$

[1]) Vgl. 1. Bernoulli'sche Polynome und elliptische Funktionen, Journal f. d. Math. **164** (1930). 2. Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Math. Annalen **104** (1931). 3. Theorie der *t*-Funktionen, Math. Annalen **104** (1931). 4. Elementary properties of the t_r-functions, Transact. Am. Math. Soc. **32** (1930). 5. Orthogonale Systeme elliptischer Funktionen, Math. Zeitschr. **34** (1931).

Aus ihnen bilde man mit reellen Parametern u_1, u_2 die komplexe Veränderliche $\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 = u$ und betrachte meromorphe Funktionen $s(u)$, die im Parallelogramm $|u_1| < \frac{1}{2}$, $|u_2| < \frac{1}{2}$ der Einschränkung

$$s(u) = \frac{1}{u} + O(1) \tag{2}$$

genügen. Diese s-Funktion enthalte zwei komplexe Parameter x, y, deren Verbindung

$$\omega_1 y - \omega_2 x = z \tag{3}$$

der Bedingung $z \not\equiv 0$ (mod. ω_1, ω_2) unterworfen werde; genießt $s(u)$ im Großen die Periodizität

$$s(u) = e^{2\pi i x} s(u + \omega_1) \tag{4}$$
$$= e^{2\pi i y} s(u + \omega_2), \tag{4'}$$

so ist durch (3. 4. 4') die Funktion eindeutig gekennzeichnet; um die Parameter in die Bezeichnung aufzunehmen, schreiben wir $s(u) = s\begin{pmatrix} x, y \\ u \end{pmatrix}$ und erlauben uns gelegentlich die Schreibart zu gebrauchen:

$$s\begin{pmatrix} 0, y \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Die so eingeführte Kroneckersche s-Funktion läßt für $u \not\equiv 0$ (mod. ω_1, ω_2) und für reelle $x, y \not\equiv 0(1)$ folgende bedingt konvergente Darstellung zu:

$$s(u) = \lim_{n\to\infty} \sum_{hk}^{0<h^2+k^2<n} \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u + \omega_1 h + \omega_2 k}, \tag{6}$$

während für $0 < \Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ durch Jacobis ganze Transzendente $\vartheta(v)$ eine schnellere Berechnung ermöglicht wird. Nämlich für kleine $|v|$ sei

$$\vartheta(v) = v\vartheta'(0) + O(v^2); \tag{7}$$

im Großen aber

$$\vartheta(v) = -\vartheta(v+1) = -e^{\pi i\left(2v + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \vartheta\left(v + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right). \tag{7'}$$

Durch (7. 7') ist $\vartheta(v)$ nicht nur bestimmt, sondern auch allgemein ohne Konvergenzschwierigkeit zu berechnen; es ist aber der symmetrisch normierte Quotient

$$\frac{\vartheta'(0)}{\omega_1} \frac{\vartheta\left(\frac{u}{\omega_1} + y\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{\omega_1}\right)\vartheta(y)} = s\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \tag{8}$$

und allgemeiner

$$e^{-\frac{2\pi i x u}{\omega_1}} \frac{\vartheta'(0)}{\omega_1} \frac{\vartheta\left(\frac{u+z}{\omega_1}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{\omega_1}\right)\vartheta\left(\frac{z}{\omega_1}\right)} = s\begin{pmatrix} x, y \\ u \end{pmatrix}, \tag{8'}$$

während umgekehrt für jedes x, y, u sich ausdrückt:

$$\vartheta\left(\frac{z}{\omega_1}\right) = \frac{\vartheta'(0)}{\omega_1} \frac{e^{\frac{\pi i x z}{\omega_1}}}{\sqrt{s\begin{pmatrix} x, y \\ u \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} x, y \\ -u-z \end{pmatrix}}}. \tag{8''}$$

Mit Weierstraßens Funktion $\wp(u;\ \omega_1,\ \omega_2) = \wp(u)$ besteht ein Zusammenhang, der die Nullstellen von $s(u)$ in Evidenz setzt. Es spaltet sich

$$\wp(u) - \wp(z) = s\begin{pmatrix} x, y \\ u \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} -x, -y \\ u \end{pmatrix}, \tag{9}$$

woraus in Übereinstimmung mit (8) $s\begin{pmatrix} x, y \\ -z \end{pmatrix} = 0$ folgt, denn durch

$$u_0 \equiv -z \ (\text{mod. } \omega_1,\ \omega_2)$$

wird die Bestimmungsgleichung $s(u_0) = 0$ gelöst. Die erwähnten analytischen Funktionen können auch durch Funktionalgleichungen festgelegt werden. Ist $j = 1, 2, 3$; $A(u_j) = A_j$ analytisch in u_j; G_ν eine ganze Funktion des Grades $\nu = 1, 2, \ldots$ ihrer Argumente mit Koeffizienten, die von u_j frei sind, und gilt

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0, \tag{10}$$

so nennt man eine Aussage

$$G_\nu(A_1, A_2, A_3) = 0, \tag{10'}$$

die identisch in u_1, u_2 gilt, Additionstheorem der analytischen Funktion $A(u)$. Die Gradzahl ν des Polynomes G kann als Grad des Additionstheoremes (10') bezeichnet werden, wenn G als irreduzibel vorausgesetzt wird. Von Weierstraß stammt der grundlegende Satz, daß die elliptischen Funktionen wie deren elementare Grenzfälle algebraische Additionstheoreme zulassen; und umgekehrt, daß eine algebraische Funktion von $\wp$ existiert:

$$\alpha(\wp u) = A(u),$$

welche bei vorgegebenen ν und G die Lösung von (10') liefert. Für $\alpha(\wp) = \wp$, $A(u) = \wp(u)$ insbesondere wird mit von u freien Zahlen e_j

$$\begin{aligned} G_\nu(\wp_1, \wp_2, \wp_3) = {} & 4\,(\wp_1 + \wp_2 + \wp_3)\,[\wp_1\,\wp_2\,\wp_3 - e_1\,e_2\,e_3] \\ & - \{\wp_1\,\wp_2 + \wp_2\,\wp_3 + \wp_3\,\wp_1 - e_1\,e_2 - e_2\,e_3 - e_3\,e_1\}^2, \end{aligned} \tag{11}$$

also $\nu = 4$ der Grad des Additionstheoremes

$$G_4(\wp_1, \wp_2, \wp_3) = 0. \tag{11'}$$

Auch die Jacobische ϑ-Funktion, wie sie in (7. 7') oder (8'') eingeführt wurde und welche sich bei arithmetischen wie bei numerischen Aufgaben als besonders zweckmäßig erweist, genügt einer Funktionalgleichung vierten Grades, der sogenannten dreigliedrigen Identität von Weierstraß:

$$\left.\begin{aligned} & \vartheta(v_1 - v_2)\,\vartheta(v_1 + v_2)\,\vartheta(v_3 - v_4)\,\vartheta(v_3 + v_4) + \\ & + \vartheta(v_2 - v_3)\,\vartheta(v_2 + v_3)\,\vartheta(v_1 - v_4)\,\vartheta(v_1 + v_4) + \\ & + \vartheta(v_3 - v_1)\,\vartheta(v_3 + v_1)\,\vartheta(v_2 - v_4)\,\vartheta(v_2 + v_4) \end{aligned}\right\} = 0. \tag{12}$$

Das vollständige Lösungssystem von (12) wird durch

$$e^{a+bv^2}\,\vartheta\left(cv, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \tag{12'}$$

geliefert; jede der Identitäten (11'. 12) kann gebraucht werden als Grundlage zur Theorie elliptischer Funktionen. Eingewendet werden könnte gegen die Grundlegung (11), daß sie einen Zusammenhang zwischen dem Grad der Funktionalgleichung und der Mannigfaltigkeit zugehöriger Lösungen nicht erkennen lasse. Der Begriff der ϑ-Funktion anderseits zeigt sich als zu eng, um die volle Lösung (12') der homogenen Beziehung (12) liefern zu können.

Läßt man aber auch Funktionalgleichungen zur Kennzeichnung analytischer Funktionen mehrerer Veränderlicher zu, so können die erwähnten Einwände behoben werden. Durch Quotientenbildung von Ausdrücken (12') erreicht man z. B. die gewünschte Steigerung der Argumentzahl; wegen (8') stößt man dabei auf s-Funktionen.

§ 2. Der Additionssatz.

An (1. 12) anknüpfend denken wir $v_1, \ldots, v_4$ vertreten durch vier neue Größen y, u, η, v. Dann gilt entsprechend:

$$\left.\begin{array}{llll} \vartheta(v-u) & \vartheta(y+\eta) & \vartheta(y+u)\,\vartheta(\eta+v)+ \\ +\,\vartheta(y+u-v)\,\vartheta(y+\eta+v) & \vartheta(u) & \vartheta(\eta)+ \\ +\,\vartheta(u-v-\eta)\,\vartheta(u+y+\eta) & \vartheta(y) & \vartheta(v) \end{array}\right\} = 0$$

und für $y, u, \eta, v, y+\eta, u-v \not\equiv 0 \left(\text{mod. } 1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$:

$$\frac{\vartheta(y+u)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta(\eta+v)}{\vartheta(u)}\frac{}{\vartheta(\eta)\,\vartheta(v)} = \frac{\vartheta(y+u-v)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta(y+\eta+v)}{\vartheta(u-v)}\frac{}{\vartheta(y+\eta)\,\vartheta(v)} + \frac{\vartheta(\eta+v-u)}{\vartheta(\eta)}\frac{\vartheta(y+\eta+u)}{\vartheta(v-u)}\frac{}{\vartheta(y+\eta)\,\vartheta(u)}.$$

Der in (1. 8″) angeschriebene Quotient

$$\frac{\vartheta'(0)}{\omega_1}\,\frac{\vartheta\left(y+\frac{u}{\omega_1}\right)}{\vartheta(y)\,\vartheta\left(\frac{u}{\omega_1}\right)} = s\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$

genügt also einer homogenen Funktionalgleichung, die im Gegensatz zu (1. 12) nicht bis zum 4., sondern nur zum 2. Grad ansteigt; freilich variiert dabei ein Argumentpaar simultan, und die „obere" Variable y anders als die „untere" Variable u. Da die oberen Variabeln additiv, die unteren subtraktiv verbunden in die Identität

$$(1) \qquad s\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} y \\ u-v \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} y+\eta \\ v \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \eta \\ v-u \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} y+\eta \\ u \end{pmatrix}$$

eingehen, so kann (1) durch den Weierstraßschen Begriff „Additionstheorem" nicht erfaßt werden. Indem wir die Anzahl der auftretenden Variabeln offen lassen, um die allgemeineren Funktionen (1.8′) mitnehmen zu können, bezeichnen wir eine Identität zwischen Funktionen mehrerer Veränderlicher als „Additionssatz" dann, wenn jene Argumente teils additiv, teils subtraktiv verbunden auftreten.

Wegen (1.8′) kann (1) verallgemeinert werden unter Benutzung von

$$\begin{aligned} xu + \xi v &= x(u-v) + (x+\xi)v \\ &= \xi(v-u) + (x+\xi)\,u; \end{aligned} \qquad (1')$$

es gilt für $u, v, u-v,\ \omega_1 y - \omega_2 x,\ \omega_1\eta - \omega_2\xi,\ \omega_1(\eta+y) - \omega_2(x+\xi) \not\equiv 0 \ (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$ der für die s-Funktion kennzeichnende Additionssatz:

$$(2) \quad s\begin{pmatrix} x, y \\ u \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} \xi, \eta \\ v \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} x, y \\ u-v \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} x+\xi, y+\eta \\ v \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \xi, \eta \\ v-u \end{pmatrix} s\begin{pmatrix} x+\xi, y+\eta \\ u \end{pmatrix}.$$

Daß jedes zulässige komplexe Periodenpaar ω_1, ω_2 zu einer Lösung

$$(3) \qquad s\begin{pmatrix} x, y \\ u;\ \omega_1,\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

für (2) führt, ist nach obiger Herleitung evident; das volle Lösungssystem zu (2) enthält also wenigstens zwei komplexe Parameter. Zu begründen bleibt, daß außer (3) keine weiteren Lösungen zu (2) existieren.

Bekannt war durch (1.12′) das vierparametrige volle Lösungssystem von (1.12); der Divisionsprozeß, durch welchen man von (1.12) nach (2.1) kommt, kann die Anzahl der in die Lösung eingehenden Parameter höchstens verkleinern. Er verringert sie tatsächlich um zwei Einheiten, vermöge der doppelten Homogenität in Argument

und Exponentialfaktor. Die Spaltung in obere und untere Argumente bewirkt, daß jede „Dehnung" $v \to cv$ im ϑ-Argument zugleich auf y und $\frac{u}{\omega_1}$ in (1) Einfluß nimmt; wegen der Homogenität:

$$\alpha \cdot s\begin{pmatrix} x, y \\ \alpha u;\ \alpha\omega_1,\ \alpha\omega_2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} x, y \\ u;\ \omega_1,\ \omega_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

und Symmetrie:

$$s\begin{pmatrix} x, y \\ u;\ \omega_1,\ \omega_2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} y, x \\ u;\ \omega_2,\ \omega_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

der besonderen, durch (1.6) gegebenen Funktion zeigt sich die letztere als ebenso allgemein wie

$$e^{\beta_0+(\beta_1 x+\beta_2 y)u}\, s\left(\frac{\beta_3 x,\ \beta_4 y}{\beta_5 u;\ \omega_1,\ \omega_2}\right),$$

wenn wir durch Verfügung über die x, y-Einheiten $\beta_3 = \beta_4 = 1$ herbeiführen. Durch Grenzprozeß in u kann dann wegen (5) simultan $\beta_1 = \beta_2 = 0$ erreicht werden, so daß zudem $e^{\beta_0} = \beta_5$ ausfällt, wodurch (4) befriedigt ist.

Aussagen allgemeineren Charakters über homogene Funktionalgleichungen und deren analytische Lösungen scheinen von Interesse für die Weiterentwickelung der Analysis. Daß durch (1′) die Argumententripel von (2) bilinear gekoppelt sind, vereinfacht die gegenwärtige Theorie und gibt einen Hinweis auf die Einschränkung, der das Argumentsystem einer Funktionalgleichung in seiner Verknüpfung unterworfen ist.

§ 3. Geometrische Deutung.

Die folgende Umformung von Summen dreier Quadrate:

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^2+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v-u}\right)^2+\left(\frac{1}{u-v}-\frac{1}{u}\right)^2 = 2\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{(u-v)^2}\right\}$$

ist gleichwertig der Teilbruchzerlegung:

$$\frac{1}{uv}+\frac{1}{v(v-u)}+\frac{1}{(u-v)\,u}=0, \tag{1}$$

und beide Aussagen betreffen ein besonderes Paar orthogonaler Vektoren im dreidimensionalen Raum.

Es seien j_1, j_2, j_3 zueinander orthogonale Einheitsvektoren; löst man das durch (1) gegebene innere Produkt in die Faktoren

$$\frac{j_1}{u}+\frac{j_2}{v}+\frac{j_3}{u-v}=\mathfrak{q}_{00}$$

sowie

$$\frac{j_1}{v}+\frac{j_2}{v-u}+\frac{j_3}{u}=\mathfrak{r}_{00}$$

auf und setzt allgemein

$$\frac{j_1}{u+h}+\frac{j_2}{v+k}+\frac{j_2}{u-v+h-k}=\mathfrak{q}_{hk},\quad \frac{j_1}{v+h}+\frac{j_2}{v-u+k}+\frac{j_3}{u+h-k}=\mathfrak{r}_{hk}$$

für ganze h und k, so ist nicht nur entsprechend (1)

$$\mathfrak{q}_{hk}\,\mathfrak{r}_{hk}=0\,,$$

sondern es konvergiert auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \mathfrak{q}_{hk}\, \mathfrak{r}_{hk} = 0\,, \tag{2}$$

und eine leichte Umgestaltung von (2) liefert das Additionstheorem der Funktion ctg u mit einer von u und v freien Zahl c, die sich nachträglich leicht bestimmt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \mathfrak{q}_{hk}\, \mathfrak{r}_{hk} = \tag{2'}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \left\{ \frac{1}{(u+h)(v+k)} + \frac{1}{(v+k)(v-u+k-h)} + \frac{1}{(u-v+h-k)(u+h)} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{-n}^{n}{}^{h} \frac{1}{u+h} \cdot \sum_{-n}^{n}{}^{k} \frac{1}{v+k} + c + \sum_{-n}^{n}{}^{k} \frac{1}{v+k} \cdot \sum_{-n}^{n}{}^{l} \frac{1}{v-u+l} + \sum_{-n}^{n}{}^{l} \frac{1}{u-v-l} \cdot \sum_{-n}^{n}{}^{h} \frac{1}{u+h} \right\}.$$

Wir suchen nun eine von u, v freie Zahlenfolge $a_{h,k}$ so zu bestimmen, daß die in (2') getätigten Umformungen erhalten bleiben. Deshalb fordern wir den Zerfall

$$a_{h,k} = a_h(x)\, a_k(\xi)\,,$$

wobei die Elemente der einfach erstreckten Folge $a_h(x)$ der Konvergenzbedingung

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{m}^{n}{}^{h} \frac{a_h(x)}{h} = 0 \tag{3}$$

zu genügen haben. In (2') steckt noch eine weitere Umsetzung, deren Verallgemeinerung wir zur Bestimmung von $a_h(x)$ verwenden, um für die Vektorkomponente

$$j_1 \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}^{h} a_h\, \mathfrak{q}_{hk} \tag{3'}$$

einen Additionssatz herzuleiten. Aus

$$a_h(x)\, a_k(\xi) = a_k(x+\xi) \cdot a_{k-h}(-x)$$

entnimmt man

$$a_h(x) = e^{2\pi i x h},$$

und wegen (3) schränken wir den zulässigen Argumentbereich ein auf

$$0 < x < 1, \qquad 0 < \xi < 1 - x. \tag{4}$$

Mit $a_{h,k} = e^{2\pi i(xh+\xi k)}$ und den Ungleichungen (4) wird einerseits

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}^{hk} a_{h,k}\, \mathfrak{q}_{h,k}\, \mathfrak{r}_{h,k} = 0\,, \tag{5}$$

während das in (2') eingehende c verschwindet, weil sich

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}^{hk} a_{hk}\, \mathfrak{q}_{hk}\, \mathfrak{r}_{hk} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{-n}^{n}{}^{h} \frac{a_h(x)}{u+h} \sum_{-n}^{n}{}^{k} \frac{a_k(\xi)}{v+k} + \sum_{-n}^{n}{}^{k} \frac{a_k(x+\xi)}{v+k} \cdot \sum_{-n}^{n}{}^{l} \frac{a_l(-x)}{v-u+l} \right. \tag{6}$$

$$\left. + \sum_{-n}^{n}{}^{l} \frac{a_l(-\xi)}{u-v-l} \sum_{-n}^{n}{}^{h} \frac{a_h(x+\xi)}{u+h} \right\}$$

transformiert, und die bei Umsummation auftretenden Reste mit n^{-1} gegen Null streben. Durch (5. 6) ist ein Additionssatz gewonnen für die Vektorkomponente (3'); letztere aber ist noch nicht jeder Lage im dreidimensionalen Raum fähig. Um vielmehr die konstruierte analytische Funktion von u zur Beschreibung aller räumlichen Erscheinungen geschickt zu machen, benutzen wir die Zweidimensionalität der komplexen Zahlebene und verallgemeinern die in (5. 6.) ausgeführten Summen derart, daß z. B. an Stelle von

$$u + \omega_1 h,\quad v + \omega_1 l,\quad \sum_{-n}^{n}{}^{h,l}$$

$$u + \omega_1 h + \omega_2 k, \qquad v + \omega_1 l + \omega_2 m, \qquad \sum_{-n}^{n}{}_{hklm}$$

in Verallgemeinerung von (6) auftreten. Die so ermöglichte Adjunktion von ω_2, y, η gibt den Vektorkomponenten die volle räumliche Freiheit und verallgemeinert (6) zu (2.2′), welches in geometrischer Bezeichnung:

$$(7) \qquad j_1 s\begin{pmatrix} x, y \\ u \end{pmatrix} + j_2 s\begin{pmatrix} x+\xi, y+\eta \\ v \end{pmatrix} + j_3 s\begin{pmatrix} -\xi, -\eta \\ u-v \end{pmatrix} = \mathfrak{q},$$

$$(7') \qquad j_1 s\begin{pmatrix} \xi, \eta \\ v \end{pmatrix} + j_2 s\begin{pmatrix} -x, -y \\ v-u \end{pmatrix} + j_3 s\begin{pmatrix} x+\xi, y+\eta \\ u \end{pmatrix} = \mathfrak{r}$$

sich als inneres Produkt beider Vektoren darstellt und

$$(8) \qquad \mathfrak{q}\mathfrak{r} = 0$$

lautet. Nur fünf unabhängige Größen benötigen wir in Wahrheit zur Bestimmung des orthogonalen Vektorpaares (7. 7′), etwa $\frac{\omega_2}{\omega_1}; u, v, y, \eta$. Die sechste Größe ω_1 gewinnt aber Bedeutung, wenn man (8) als Affinität des dreidimensionalen Raumes deutet, indem ein orthogonales Tripel von Einheitsvektoren vermöge dreier Drehungen der Richtung nach, sodann durch drei Streckungen der Hauptachsen zur gewünschten Endlage gebracht wird. Der diese symmetrische Raumaffinität bewirkende Tensor wird dann parametrisch durch die Größen $\omega_1, \omega_2; u, v, y, \eta$ bestimmt. Die als homogener Exponentialfaktor in (8) eingehenden x, ξ heben sich heraus und können auf Null spezialisiert werden. Für reelle $\omega_1, \frac{\omega_2}{i}$ werden dann alle reellen $\mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ durch Parameterwerte dargestellt, die den Intervallen angehören:

$$0 < \frac{u}{\omega_1}, \quad \frac{v}{\omega_1}, \; y, \; \eta < 1; \qquad 1 < \frac{\omega_2}{i\omega_1} < \infty.$$

Um die Abhängigkeit der Vektoren von den Parametern klarzustellen, gehen wir mit Hilfe von (1.5′) zu zweidimensionalen Sonderfällen über. Es wird z. B.

$$\begin{cases} \mathfrak{q}^* = j_2 s\begin{pmatrix} y+\eta \\ -\omega_1\eta \end{pmatrix} + j_3 s\begin{pmatrix} -\eta \\ -\omega_1 y + \omega_1\eta \end{pmatrix} \\ \mathfrak{r}^* = j_2 s\begin{pmatrix} -y \\ \omega_1 y - \omega_1\eta \end{pmatrix} + j_3 s\begin{pmatrix} y+\eta \\ -\omega_1 y \end{pmatrix}, \end{cases}$$

und die Darstellung

$$\begin{cases} \frac{\omega_1}{\vartheta'(0)}\mathfrak{q}^* = \frac{\vartheta(y)}{\vartheta(\eta)}\left[\frac{-j_2}{\vartheta(y+\eta)} + \frac{j_3}{\vartheta(-y+\eta)}\right] \\ \frac{\omega_1}{\vartheta'(0)}\mathfrak{r}^* = \frac{\vartheta(\eta)}{\vartheta(y)}\left[\frac{j_2}{\vartheta(y-\eta)} - \frac{j_3}{\vartheta(y+\eta)}\right] \end{cases}$$

zeigt unmittelbar die Orthogonalität

$$\mathfrak{q}^*\,\mathfrak{r}^* = 0;$$

für $\eta = \frac{\omega_2}{2\omega_1} = \frac{\omega}{2}$ wird z. B.

$$\begin{cases} \mathfrak{q}^* = \quad s\begin{pmatrix} y - \frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega_2}{2} \end{pmatrix}\left[e^{2\pi i(y+\omega)}\, j_2 - j_3\right] \\ \mathfrak{r}^* = -s\begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} - y \\ \omega_1 y \end{pmatrix}\left[j_2 + e^{2\pi i(y+\omega)}\, j_3\right]. \end{cases}$$

§ 4. Orthogonalität im Funktionenraum.

Die Formulierung (3.8) des Additionssatzes lief auf die Orthogonalität eines Vektorpaares im dreidimensionalen Raum hinaus. Indem wir auf die Fassung (2.2) zurückgreifen, Transformation n-ter Ordnung ($n = 1, 2, \ldots$) vornehmen und das Argument $y + \eta$ eliminieren, werden wir auf orthogonale Vektorpaare im n-dimensionalen Raum geführt; für $n \to \infty$ insbesondere und gewisse Eigenwerte y_k ($k = 0, \pm 1, \ldots$) findet man an $s\binom{y_k}{u}$ dieselben Orthogonalitätseigenschaften, welche an Legendres Polynomen und anderen Unterfällen der hypergeometrischen Funktion verfolgt wurden. Aus (1.4) und (2.2) folgt

$$s\binom{y}{u}\, s\binom{\eta}{v} = s\binom{y}{u-v}\, s\binom{y+\eta}{v} + s\binom{\eta}{v-u}\, s\binom{y+\eta}{u},$$

somit durch Summation

$$\sum_0^{n-1} s\left(\begin{matrix} y \\ u + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} \eta \\ v + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right) = s\binom{y}{u-v} \sum_0^{n-1} s\left(\begin{matrix} y+\eta \\ v + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right) + s\binom{\eta}{v-u} \sum_0^{n-1} s\left(\begin{matrix} y+\eta \\ u + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right).$$

Aus dem definierenden System (1. 1. 1′. 2) entnimmt man

$$\sum_0^{n-1} s\left(\begin{matrix} y+\eta \\ u + \frac{\nu\omega_1}{n};\ \omega_1,\ \omega_2\end{matrix}\right) = s\left(\begin{matrix} y+\eta \\ u;\ \frac{\omega_1}{n},\ \omega_2\end{matrix}\right)$$

und

$$(1) \qquad \sum_0^{n-1} \frac{1}{n}\, s\left(\begin{matrix} y \\ u + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} \eta \\ v + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right) = s\binom{y}{u-v} \frac{1}{n}\, s\left(\begin{matrix} y+\eta \\ u;\ \frac{\omega_1}{n},\ \omega_2\end{matrix}\right) + s\binom{\eta}{v-u} \frac{1}{n}\, s\left(\begin{matrix} y+\eta \\ v;\ \frac{\omega_1}{n},\ \omega_2\end{matrix}\right).$$

Eine Faktorenabspaltung rechter Hand tritt ein für

$$v - u = k\,\frac{\omega_1}{n} \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$

in welchem Falle aus der Bestimmungsgleichung

$$s\left(\begin{matrix} y \\ -\frac{k\omega_1}{n}\end{matrix}\right) + s\left(\begin{matrix} \eta \\ \frac{k\omega_1}{n}\end{matrix}\right) = 0$$

für $u, v, y + \eta \not\equiv 0$ (1) folgt:

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} s\left(\begin{matrix} y \\ u + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} \eta \\ v + \frac{\nu\omega_1}{n}\end{matrix}\right) = 0.$$

Die Bindung (2) zwischen y und η kann auch durch ϑ-Funktionen gegeben werden und lautet dann

$$(2') \qquad \vartheta\left(y - k\,\frac{\omega_1}{n}\right)\vartheta(\eta) - \vartheta\left(\eta + k\,\frac{\omega_1}{n}\right)\vartheta(y) = 0;$$

zu reellen ω_1, y insbesondere existiert ein reelles η.

Weiter wollen wir rechts in (1) den Grenzübergang $n \to \infty$ einleiten, gebrauchen (1. 8″), sowie das Verhalten von $\vartheta\left(v, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ für große $\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right|$. Setzt man $e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} = q$, so gibt

die Produktentwickelung für genügend kleine $\left|\Im\left(\frac{u}{\omega_1}\right)\right|$ und $\omega_1 \to 0$

$$\vartheta\left(\frac{u}{\omega_1}\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = -iq^{\frac{1}{4}}\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1-q^{2\nu})\,[e^{\pi i\frac{u}{\omega_1}} - e^{-\frac{\pi i u}{\omega_1}}]\,\{1+O(\omega_1)\}.$$

Wir finden so die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_1}{n}\,s\left(\begin{matrix} y \\ u;\ \frac{\omega_1}{n},\ \omega_2\end{matrix}\right) = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i y}} \tag{3}$$

und benutzen dessen Unabhängigkeit von u, welche eine Aufspaltung der rechten Seite in (1) ermöglicht; gleichzeitig entsteht links für $u, v \not\equiv 0$ (mod. ω_1, ω_2) ein bestimmtes Integral. Es sei zunächst

$$u - v = -c \not\equiv 0 \text{ (mod. } \omega_1, \omega_2),$$

und die Integration beginne bei $a \not\equiv 0$ (mod. ω_1, ω_2), so gilt

$$\int_a^{a+\omega_1} du\, s\left(\begin{matrix} y \\ u\end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} \eta \\ u+c\end{matrix}\right) = \left[s\left(\begin{matrix} y \\ -c\end{matrix}\right) + s\left(\begin{matrix} \eta \\ c\end{matrix}\right)\right]\frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i(y+\eta)}}. \tag{4}$$

Mit Hilfe von (1. 8″) gelingt die Durchführung des Grenzprozesses $c \to 0$ in (4); sie gibt

$$\frac{1}{\omega_1}\int_a^{a+\omega_1} du\, s\left(\begin{matrix} y \\ u\end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} \eta \\ u\end{matrix}\right) = \left[\frac{\vartheta'}{\vartheta}(y) + \frac{\vartheta'}{\vartheta}(\eta)\right]\frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i(y+\eta)}}. \tag{4'}$$

Teilen wir die y-Ebene in Parallelstreifen, so liegen abzählbar viele Nullstellen:

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta}(y) = 0$$

in dem durch die Bestimmung

$$y = y_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}y_2 \qquad -\frac{1}{2} < y_1 \leqq \frac{1}{2} \tag{5'}$$

abgegrenzten Gebiet. Beginnend mit $y_0 = \frac{1}{2}$ ordnen wir die Nullstellen (5) nach wachsenden Ordinaten:

$$\Im(y_{\nu-1}) < \Im(y_\nu) \qquad \nu \equiv 0\ (1). \tag{5″}$$

Für große $|\nu|$ gilt dann asymptotisch

$$y_\nu = \nu\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{1}{2\pi i\nu} + O(\nu^{-2});$$

außerdem wird

$$y_\nu + y_{-\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases} \\ 0 \end{cases},$$

und alle Nullstellen von (5) sind einfach. Die durch (5. 5′. 5″) erklärte Zahlenfolge kann als das System der „Eigenwerte“ zur Funktion $s\left(\begin{matrix} y \\ u\end{matrix}\right)$ angesprochen werden; nämlich die Identität (4′) geht für $\varkappa, \lambda \equiv 0\ (1)$; $\varkappa + \lambda \not\equiv 0$ über in

$$\int_a^{a+\omega_1} du\, s\left(\begin{matrix} y_\varkappa \\ u\end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} y_\lambda \\ u\end{matrix}\right) = 0, \tag{6}$$

zeigt also die Orthogonalität der „Eigenfunktionen“ $s\binom{y_\varkappa}{u}$ und $s\binom{y_\lambda}{u}$. Aus (4′) oder aus (1. 5) fließt

$$(6') \qquad \int_a^{a+\omega_1} du\, s\binom{y_\nu}{u} s\binom{y_{-\nu}}{u} = \int_a^{a+\omega_1} du\, s\binom{y_\nu}{u} s\binom{-y_\nu}{u}$$

$$= \int_a^{a+\omega_1} du\, \wp(u) - \omega_1 \wp(\omega_1 y_\nu) = -2\eta - \omega_1 \wp(\omega_1 y_\nu).$$

In dem von den Seiten $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ aufgespannten Parallelogramm der u-Ebene, d. h. im Gebiet

$$(7) \qquad \begin{cases} 0 \leqq u_1 < \frac{1}{2} \\ 0 \leqq u_2 < \frac{1}{2} \end{cases},$$

wobei $u = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2$ ist, liegt genau eine Wurzel ζ der Bestimmungsgleichung

$$(7') \qquad 2\eta + \omega_1 \wp(\zeta) = 0.$$

Führt man zu Zwecken der Normierung den Quotienten

$$(8) \qquad \frac{s\binom{y_\nu}{u}}{s\binom{y_\nu}{\zeta}} = \psi_\nu(u) = \psi_\nu$$

ein, so kann (6. 6′) zuammengefaßt werden zu

$$(6'') \qquad \frac{1}{\omega_1'} \int_a^{a+\omega_1} du\, \psi_\varkappa \psi_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } \begin{cases} \varkappa + \lambda = 0 \\ \neq 0 \end{cases} \\ 0 \end{cases}.$$

Damit kann das Problem angegriffen werden, eine analytische Funktion zu entwickeln nach s-Funktionen; für vorgegebenes f wird also nach einer Reihe

$$(9) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty}{}_\nu\, b_\nu \psi_\nu = f(u)$$

gefragt, und insbesondere, wann die Konvergenzbedingung

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\{ \sum_m^n{}_\nu\, \psi_\nu(u) \int_a^{a+\omega_1} dt\, f(t)\, \psi_{-\nu}(t) \right\} = 0$$

erfüllt werden kann. Die genaue Umgrenzung des Konvergenzgebietes durch Größenschätzung von $\int dt\, f(t)\, \psi_{-\nu}(t)$ zeigt z. B., daß alle ganzen Transzendenten des Geschlechtes 0 oder 1 für $\begin{cases} 0 < u_1 < 1 \\ 0 < u_2 < 1 \end{cases}$ als Reihen vom Typ (9) darstellbar sind.

§ 5. Anknüpfung an die $\wp$-Funktion.

Es sei ω_1, ω_2 ein vorgegebenes Periodenpaar der z-Ebene, E_1, E_2 elliptische Funktionen dazu und G ein geeignetes Polynom zweier Veränderlicher mit Koeffizienten, die von z frei sind; dann ist $G(E_1, E_2) = 0$. Setzt man insbesondere $\wp(z) = \wp$, so existieren für $\nu = 1, 2, \ldots$ zwei Polynome $Z_{\nu^2+1}(\wp)$ und $N_{\nu^2}(\wp)$ mit Koeffizienten unabhängig von z, so daß $\wp(\nu z)$ sich rational durch $\wp$ angeben läßt:

$$(1) \qquad \wp(\nu z) = \frac{Z_{\nu^2+1}(\wp)}{N_{\nu^2}(\wp)}.$$

Die in z identische Aussage (1) drückt aus, daß die $\wp$-Funktion hinsichtlich ihres Argumentes „Multiplikation zuläßt"; eine Vervielfachung des Argumentes durch die natürliche Zahl ν beläßt die linke Seite von (1) in dem durch $\wp$ gesetzten Funktionenkörper.

Vervollständigt wird dieses Multiplikationstheorem durch Weierstraßens schöne Methode, die Koeffizienten in Z und N wirklich auszurechnen. Nämlich durch die Anfangswerte

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 1, \quad \psi_2 = -\wp' \tag{2}$$

und die Rekursion

$$\wp(z) - \wp(\nu z) = \frac{\psi_{\nu-1}\psi_{\nu+1}}{\psi_\nu^2} \tag{3}$$

ist eine Folge ψ_ν von elliptischen Funktionen des Argumentes z bestimmt. Aus (3) fließt aber für natürliche $\lambda > \nu$ die von $\wp$ freie biquadratische Rekursion

$$\psi_{\lambda+\nu}\psi_{\lambda-\nu} = \psi_{\lambda+1}\psi_{\lambda-1}\psi_\nu^2 - \psi_{\nu+1}\psi_{\nu-1}\psi_\lambda^2, \tag{4}$$

die jedes ψ rational auf ψ_2, ψ_3, ψ_4 oder $\wp'$, $\wp(2z)$, $\wp(3z)$ zurückbringt; die letztere Basis ist aber rational auf $\wp, \wp'$ und algebraisch auf $\wp$ allein reduzierbar. Setzt man darnach den Quotienten (3) zusammen, so muß wegen (1) $\wp'$ herausfallen und die gewünschte rationale Gestalt des Multiplikationstheorems in Erscheinung treten.

Die Konstruktion der einparametrigen Funktionenfolge ψ_ν vermittelt also die Herstellung der Polynompaare Z_{ν^2+1}, N_{ν^2} des Argumentes $\wp$ und liefert den gewünschten in $\wp$ rationalen Ausdruck für $\wp(\nu z)$. Eine leichte Verallgemeinerung bringt die Rekursion (4) mit natürlichen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ in folgende Gestalt:

$$\psi_{\lambda_1-\lambda_2}\psi_{\lambda_1+\lambda_2}\psi_{\lambda_3-\lambda_4}\psi_{\lambda_3+\lambda_4} + \psi_{\lambda_2-\lambda_3}\psi_{\lambda_2+\lambda_3}\psi_{\lambda_1-\lambda_4}\psi_{\lambda_1+\lambda_4} + \psi_{\lambda_3-\lambda_1}\psi_{\lambda_3+\lambda_1}\psi_{\lambda_2-\lambda_4}\psi_{\lambda_2+\lambda_4} = 0, \tag{4'}$$

die wir mit (1.12) vergleichen; beide stimmen formal überein, und da durch (1.12′) das volle Lösungssystem von (4′) bekannt ist, so schließen wir mit $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$ auf

$$\psi_\nu(z) = c\,\frac{\vartheta(\nu z)}{[\vartheta z]^{\nu^2}}. \tag{5}$$

Der Exponent im Nenner von (5) nimmt unmittelbar Bezug auf die Zweidimensionalität der komplexen Zahlebene und die Nullstellendichte der ϑ-Funktionen; die biquadratische Rekursion (4′) aber betont arithmetische Erscheinungen wie die Konstanz der Quadratsummen für die Zeiger jedes Gliedes. Für nicht ganze ν stellt ψ_ν keine elliptische Funktion dar, doch bleibt (4′) bestehen für die „fastperiodischen" $\frac{\vartheta(nz\sqrt{2})}{[\vartheta(z)]^{2n^2}}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

§ 6. Zur Multiplikation der s-Funktion.

Die Aussage (5.1) verknüpfte in rationaler Weise elliptische Funktionen einfachen und vielfachen Argumentes. Nach (1. 5) ist das Produkt $s(u)\,s(-u)$ und nach (1.1. 1′. 2) auch der Quotient $\frac{s(\nu u)}{s^\nu(u)}$ für natürliche ν elliptisch. Mit von u freien Koeffizienten existiert also in drei Veränderlichen ein Polynom P, so daß identisch in u, x, y die Beziehung gilt:

$$P[s(-u), \quad s(u), \quad s(\nu u)] = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Die Aussage (1) leitet eine Multiplikationstheorie der Funktion $s(u)$ ein, die durch Elimination auf Zusammenhänge wie (5. 1) zurückführt, aber von jenen nicht umfaßt wird.

Zunächst gilt es, die Darstellung (1) explizite anzugeben. Dies gelingt durch An-

wendung des Additionssatzes (2. 2), aus welchem jedoch die variierenden oberen Argumente $x+\xi, \ldots$ erst entfernt werden müssen; dabei steigt der Grad der Funktionalgleichung um eine Einheit, und wir betrachten die s-Funktion nur in Abhängigkeit von ihrem unteren Argument. Überdies entnehmen wir zu Eliminationszwecken aus (1. 8′), daß

$$(2) \qquad s\binom{x,\ y}{u} + s\binom{-x,\ -y}{-u} = 0$$

ist. Es seien $u, v, w, u+v, u+w, v-w \not\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$, und wir erlauben uns die abkürzende Schreibweise $s\binom{x,\ y}{u} = s\binom{x}{u}$; aus (2. 2) fließt insbesondere

$$s\binom{x}{v}\, s\binom{x}{w} = s\binom{x}{v-w}\, s\binom{2x}{w} + s\binom{x}{w-v}\, s\binom{2x}{v}$$

$$\begin{aligned} s\binom{x}{u}\, s\binom{x}{v}\, s\binom{x}{w} &= s\binom{x}{v-w} \cdot s\binom{x}{u}\, s\binom{2x}{w} + s\binom{x}{w-v} \cdot s\binom{x}{u}\, s\binom{2x}{v} \\ &= -s\binom{x}{v-w} \cdot s\binom{-x}{-u}\, s\binom{2x}{w} - s\binom{x}{w-v} \cdot s\binom{-x}{-u}\, s\binom{2x}{v} \\ &= -s\binom{x}{v-w}\left[s\binom{-x}{-u-w}\, s\binom{x}{w} + s\binom{2x}{u+w}\, s\binom{x}{-u}\right] - \\ &\quad - s\binom{x}{w-v}\left[s\binom{-x}{-u-v}\, s\binom{x}{v} + s\binom{2x}{u+v}\, s\binom{x}{-u}\right] \\ &= s\binom{x}{v-w}\, s\binom{x}{u+w}\, s\binom{x}{w} + s\binom{x}{w-v}\, s\binom{x}{u+v}\, s\binom{x}{v} - \\ &\quad - s\binom{x}{-u}\left[s\binom{x}{v-w}\, s\binom{2x}{u+w} + s\binom{x}{w-v}\, s\binom{2x}{u+v}\right]. \end{aligned}$$

Wendet man auf die letzte Zeile nochmals den quadratischen Additionssatz an, so wird das obere Argument $2x$ entfernt, wonach es ausreicht, die unteren Argumente in die Bezeichnung aufzunehmen. Es entsteht folgende Funktionalgleichung dritten Grades für $s\binom{x}{u} = s(u)$:

$$(3) \quad \begin{aligned} s(u)\, s(v)\, s(w) + s(-u)\, s(u+v)\, s(u+w) &= s(v)\, s(u+v)\, s(w-v) \\ &\quad + s(w)\, s(u+w)\, s(v-w), \end{aligned}$$

die funktionentheoretisch auch direkt aus (1. 2. 4. 4′) folgt; die Lösung $s(u)$ aber enthält drei unabhängige Parameter ω_1, ω_2 und z.

In Form einer Tafel können wir nun die Anwendung von (3) auf die Multiplikationstheorie niederschreiben. Statt $s(va)$ nehmen wir nur die ganze Zahl ν mit, so daß je eine Zeile mit 12 Multiplikatoren im Einzelfall die Identität (3) vertritt. Für kleine $|\nu|$ findet man z. B.

(3′)

u	v	w	$-u$	$u+v$	$u+w$	v	$-v+w$	$v+u$	w	$w+u$	$-w+v$
1	1	−2	−1	2	−1	1	−3	2	−2	−1	3
1	1	3	−1	2	4	1	2	2	−2	4	4
2	1	2	−2	3	4	1	1	3	2	4	−1
3	1	−1	−3	4	4	1	−2	4	−1	2	2
1	1	4	−1	2	5	1	3	2	4	5	−3
1	2	4	−1	3	5	2	2	3	4	5	2
	...			...			...			...	

Wir vermissen die Anfangsfälle $|\nu| < 3$ in der aufgestellten Tabelle. Hier muß auf direktem Weg die elliptische Funktion, etwa

$$\frac{s\binom{x,y}{2u}}{s^2\binom{x,y}{u}} = \frac{\vartheta(z)\ \vartheta(z+2u)\ \vartheta^2(u)}{\vartheta'(0)\ \vartheta^2(z+u)\ \vartheta(2u)} = \alpha(\wp u),$$

algebraisch in $\wp u$ ausgedrückt werden, worauf letzteres zugunsten von $s\binom{x\,y}{u}$ entfernt werden kann.

Einen Sonderfall der s-Multiplikation empfiehlt es sich vielleicht, zuerst genauer zu verfolgen, da er formal einfacher dargestellt werden kann. Mit $u = -z$ schwindet nämlich $s\binom{x,y}{-z}$, und es kann die Identität (1), deren Koeffizienten in z elliptisch waren, einfacher gefaßt werden. Benutzen wir $\wp(z)$, $s\binom{x\,y}{z}$ und $s\binom{x,y}{\nu z}$ als Unbestimmte, so existiert dann mit von x, y freien Koeffizienten ein Polynom G, so daß für $|\nu| = 2, 3, \ldots$ identisch in x, y

$$(3'') \qquad G\left[\wp(z),\ s\binom{x,y}{z},\ s\binom{x,y}{\nu z}\right] = 0$$

wird. Gleichzeitig vereinfacht sich (3. 3′) erheblich

Für $\pm k = 1, 2, \ldots$ sei $s\binom{x,y}{kz} = r_k$, für $\nu = 2, 3, \ldots$ zudem $\wp(\nu z) = \wp_\nu$ gesetzt; aus (3′) entnimmt man alsdann

$$(4) \qquad r_1 r_{-2} = r_2 r_{-3} = r_3 r_{-4} = \cdots,$$

$$(4') \qquad r_1^2 r_3 = r_1 r_2^2 + r_{-2} r_3 r_4,$$

wobei zwar (4) nicht aber (4′) aus (1. 8′) in Evidenz gesetzt wird. Wegen (1. 5) folgt zudem

$$(4'') \qquad r_\nu r_{-\nu} = \wp_1 - \wp_\nu,$$

so daß man durch Eliminationen eine algebraische Beziehung findet zwischen $\vartheta(z)$, $\vartheta(2z)$, $\vartheta[(\nu+1)z]$. Dies ist rechnerisch einfacher als die Benutzung der elliptischen Quotienten

$$\frac{\vartheta(\nu z)}{[\vartheta(z)]^{\nu^2}} = \frac{1}{c}\psi_\nu(z).$$

Durch weitere Besonderung der Argumente in (3″) gelangt man zur Bestimmung gewisser s-Werte durch Modulfunktionen.

§ 7. Konstruktion von Modulfunktionen.

Es sei $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \omega$ gesetzt und $\Im(\omega) > 0$.
Aus (1. 7.7′) folgt für $-1 < x < 0$

$$(1) \qquad \frac{\vartheta'(0)\ \vartheta(u+z)}{\vartheta(u)\ \vartheta(z)} = 2\pi i \sum_{-}^{+}{}_{\nu} \frac{e^{2\pi i \nu z}}{e^{2\pi i(\nu\omega+u)} - 1},$$

was bei großen $\Im(\omega)$ zu Größenschätzungen für

$$(1') \qquad s\binom{x,y}{u} = e^{-2\pi i x u} \cdot 2\pi i \sum_{-}^{+}{}_{\nu} \frac{e^{2\pi i \nu z}}{e^{2\pi i(\nu\omega+u)} - 1}$$

leitet; wir fassen zunächst den Sonderfall ins Auge:

$$s\binom{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}{u} = 2\pi i\, e^{\pi i u} \sum_{-}^{+}{}_{\nu} \frac{(-1)^\nu\, e^{\pi i \nu\omega}}{e^{2\pi i(\nu\omega+u)} - 1}.$$

Mit ganzzahligen α, β setze man abkürzend für $0 < \alpha^2 + \beta^2$

$$s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ \frac{\alpha + \beta\omega}{2} \end{pmatrix} = r_{\alpha,\beta}(\omega)\,, \tag{2}$$

so wird identisch in ω zwar $r_{11}(\omega) = 0$; dagegen

$$r_{01}(\omega) = 2\pi i\, e^{\frac{\pi i\omega}{2}} \sum_{-}^{+}{}_{\nu} \frac{(-1)^\nu\, e^{\pi i\nu\omega}}{e^{\pi i\omega(2\nu+1)} - 1}$$

und bei $\Im(\omega) \to \infty$

$$r_{01}(\omega) = 2\pi i\, e^{\frac{\pi i\omega}{2}} [-2 + O(e^{2\pi i\omega})] = -4\pi i\, e^{\frac{\pi i\omega}{2}} + O(e^{\frac{5\pi i\omega}{2}}). \tag{3}$$

Entsprechend folgt

$$r_{10}(\omega) = 2\pi \sum_{-}^{+}{}_{\nu} \frac{(-1)^\nu\, e^{\pi i\nu\omega}}{e^{2\pi i\nu\omega} + 1} = \pi - 4\pi e^{\pi i\omega} + O(e^{2\pi i\omega})\,, \tag{3'}$$

so daß die drei Funktionen $r_{\alpha,\beta}(\omega)$ hinsichtlich ihres asymptotischen Verhaltens innerhalb der oberen Halbebene gekennzeichnet sind. Die Teilbruchdarstellung andererseits zeigt

$$r_{\alpha,\beta}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{hk} \frac{(-1)^{h+k}}{\frac{\alpha}{2} + h + \omega\left(\frac{\beta}{2} + k\right)} = r_{\alpha-2\beta,\beta}(\omega + 2) = (-1)^\beta \cdot r_{\alpha,\beta}(\omega + 2)\,,$$

also eine additive Periodizität. Ebenso folgt unmittelbar die Transformation

$$r_{\alpha,\beta}(\omega) = \frac{-1}{\omega}\, r_{\beta,\alpha}\left(\frac{-1}{\omega}\right), \tag{5}$$

welche zusammen mit (3. 3'. 4) das im Existenzbereich endliche Funktionenpaar $r_{\alpha,\beta}(\omega)$ eindeutig bestimmt. Setzt man nämlich, um zu Modulformen 0-ter Dimension und der Periode 2 zu gelangen, mit $\nu = 0, 1$ den Quotienten

$$4i \cdot \frac{(-1)^\nu \cdot r_{01}^2(\omega) - r_{10}^2(\omega)}{r_{01}(\omega)\, r_{10}(\omega)} = \varphi_\nu(\omega),$$

so wird für $\Im(\omega) \to \infty$

$$\varphi_\nu(\omega) = e^{-\frac{\pi i\omega}{2}} + O(e^{\frac{\pi i\omega}{2}})\,,$$

und ebenso gilt für beide Funktionen die Periode

$$\varphi_\nu(\omega) = -\varphi_\nu(\omega + 2);$$

unterscheidend ist die linear gebrochene Transformation

$$\varphi_\nu(\omega) = (-1)^{\nu+1}\, \varphi_\nu\left(\frac{-1}{\omega}\right).$$

Die hier benutzten Prinzipien, nämlich die Bestimmung des Transformationsgesetzes aus der Teilbruchdarstellung (1. 6), diejenige der ergänzenden Größenschätzung aber nach Vollziehung einer Summation etwa vermöge (7. 1'), sind der Verallgemeinerung fähig und führt zu einer Neubegründung der Theorie der Modulfunktionen.

Mittels Cauchys Integraldarstellung etwa beweise man folgenden Hilfssatz:

Es seien x und y reell, aber nicht beide ganz, so daß $\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) > 0$; dann bleibt die Teilbruchreihe (1. 6) konvergent.

Eine leichte Verallgemeinerung des in (2) gegebenen Funktionenpaares $r_{\alpha,\beta}$ führt jetzt zu Modulfunktionen der additiven Periode 1. Man betrachte etwas das Sextupel

$$\left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ \frac{\omega}{2}\end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}{}^{hk}\frac{(-1)^{h+k}}{h+\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)} = r_{01}(\omega) = r\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ \omega\Big)\\ s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}{}^{hk}\frac{(-1)^{k+1}}{h+\frac{1}{2}+\omega k} = r_{10}(\omega) = r\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ \omega\Big)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & 0\\ \frac{1+\omega}{2}\end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}{}^{hk}\frac{(-1)^{h}}{h+\frac{1}{2}+\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)} = r\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \omega\Big)\\ s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}{}^{hk}\frac{(-1)^{h}}{h+\frac{1}{2}+\omega k} = r\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ \omega\Big)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} s\begin{pmatrix}0, & \frac{1}{2}\\ \frac{1+\omega}{2}\end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}{}^{hk}\frac{(-1)^{k}}{h+\frac{1}{2}+\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)} = r\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \omega\Big)\\ s\begin{pmatrix}0, & \frac{1}{2}\\ \frac{\omega}{2}\end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}{}^{hk}\frac{(-1)^{k}}{h+\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)} = r\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ \omega\Big)\end{aligned}\right.$$

von nicht identisch verschwindenden Funktionen $r\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix};\ \omega\Big)$. Diese sechs Repräsentanten bilden mod. 2 eine Gruppe, insofern für ganze rationale a, b, c, d; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$r\begin{pmatrix}a+2\alpha & b+2\beta\\ c+2\gamma & d+2\delta\end{pmatrix};\ \omega\Big) = (-1)^{a\gamma+b\delta}\cdot r\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix};\ \omega\Big)$$

bleibt. Übt man allgemeiner auf die Parameter a, b, c, d mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganze lineare Transformation aus, so ändern sich deren Restklassen mod. 2 und die r vertauschen sich; man bilde eine Invariante durch Summation über die Elemente der Gruppe.

Andererseits bewirkt linear gebrochene Transformation von ω ebenfalls eine Vertauschung der r, und die Aufstellung der nämlichen Invarianten ergibt Funktionalgleichungen zur Kennzeichnung von Modulfunktionen. Bei der Durchführung dieser Aufgabe muß jedoch das Gebiet der s-Funktion überschritten werden; daher begnügen wir uns für den Augenblick mit der eben gegebenen Skizze.

Purdue University, Lafayette (Ind.), U.S.A., 13. 11. 30.

Eingegangen 30. November 1930.

Elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung.

Von *E. Netanjahu Mileikowsky* in Jerusalem.

Es soll in dieser Note mit den elementarsten zahlentheoretischen Mitteln der folgende Satz bewiesen werden:

Es sei $n > 2$. Gibt es drei positive ganze teilerfremde Zahlen $x < y < z$ mit $x^n + y^n = z^n$, dann ist z nicht Primzahlpotenz. Ist n nicht Primzahl, dann sind x und y keine Primzahlpotenzen. Ist n Primzahl, dann ist y nicht Primzahl.

Beweis: Es kann $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$ angenommen werden, ebenso $n \neq 2^k$ wegen der Unmöglichkeit von $x^4 + y^4 = z^4$.

1. Angenommen, n sei Primzahl und $z = p^k$ Primzahlpotenz. Dann gilt wegen $n > 2 : x + y | x^n + y^n$. Es ist $x > 1$, da $z \geqq y + 1$ und $z^n > y^n + 1$ ist. Es sei $x \geqq 2$. Dann gilt

$$\frac{x^n + y^n}{(x+y)^2} = \frac{\frac{x^{n-2}}{2} \cdot 2x^2 + \frac{y^{n-2}}{2} \cdot 2y^2}{2x^2 + 2y^2 - (x-y)^2} > \frac{2x^2 + 2y^2}{2x^2 + 2y^2 - (x-y)^2} > 1\,.$$

Daraus folgt $\dfrac{x^n + y^n}{x+y} > x + y$. Da z Primzahlpotenz ist, gilt

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} = p^{t_1}, \quad x + y = p^{t_2}, \quad t_1 > t_2.$$

Daraus folgt $x + y | x^{n-1} - \cdots + y^{n-1}$.

Es gilt $x^{n-1} - \cdots + y^{n-1} \equiv n y^{n-1} \pmod{x+y}$. Daher $x + y | n y^{n-1}$. Wegen $(x + y, y) = 1$ gilt $x + y | n$. Da n Primzahl und $x + y > 1$ ist, gilt $x + y = n$. Aus $x + y = p^{t_2} = n$ folgt $t_2 = 1$, $p = x + y$. Aus $(x+y)^n > x^n + y^n = z^n \geqq p^n$ folgt der Widerspruch.

2. Es sei z Primzahlpotenz $n = p n_1$, $p > 2$ Primzahl. Es wäre dann $(x^{n_1})^p + (y^{n_1})^p = (z^{n_1})^p$. Da mit z auch z^{n_1} Primzahlpotenz ist, folgt aus 1. der erste Teil des Satzes.

3. Angenommen, es seien n und y Primzahlen.

Es ist $\dfrac{z^n - x^n}{z - x} > z + x > z - x$. Daher gilt $z^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = y^{t_1}$, $z - x = y^{t_2}$, $t_1 > t_2$ und $z - x | z^{n-1} + \cdots + x^{n-1}$. Wegen $z^{n-1} + \cdots + x^{n-1} \equiv n x^{n-1} \pmod{z - x}$ gilt $z - x | n x^{n-1}$. Da $(z - x, x) = 1$, $z - x > z - y \geqq 1$ und n Primzahl ist, gilt $z - x = n$. Aus $z - x = y^{t_2} = n$ folgt $t_2 = 1$, $z - x = y$. Wegen $(z-x)^n + x^n < (z - x + x)^n$ gilt $(z-x)^n < z^n - x^n = y^n$, woraus der Widerspruch folgt.

4. Es sei $n = p\, n_1$, p Primzahl, $n_1 > 1$, x (oder y) $= p_1^k$ Primzahlpotenz. Es ist

$$\frac{(z^{n_1})^p - (y^{n_1})^p}{z^{n_1} - y^{n_1}} \geqq z^{n_1} + y^{n_1} > z^{n_1} - y^{n_1}.$$

Daher gilt

$$(z^{n_1})^{p-1} + \cdots + (y^{n_1})^{p-1} = p_1^{t_1},\ z^{n_1} - y^{n_1} = p^{t_2},\ t_1 > t_2,\ z^{n_1} - y^{n_1} | (z^{n_1})^{p-1} + \cdots + (y^{n_1})^{p-1}.$$

Daher gilt auch $z^{n_1} - y^{n_1} | p(y^{n_1})^{p-1}$. Wegen $(z^{n_1} - y^{n_1},\ y^{n_1}) = 1$ und

$$z^{n_1} - y^{n_1} = (z - y)\,(z^{n_1-1} + \cdots + y^{n_1-1}) > 1$$

folgt, da p Primzahl ist, $z^{n_1} - y^{n_1} = p$. Aus $z^{n_1} - y^{n_1} = p_1^{t_2}$ folgt $t_2 = 1$, $p_1 = p$. Aus $z - y | z^{n_1} - y^{n_1}$ und $z - y < z^{n_1-1} + \cdots + y^{n_1-1}$ folgt $z - y = 1$. Daraus folgt

$$p = z^{n_1} - y^{n_1} = \frac{z^{n_1} - y^{n_1}}{z - y} \geqq z + y,$$

und dem widerspricht $p = p_1 \leqq x < z$.

Jerusalem, Math. Institut der Hebräischen Universität, den 3. März 1931.

Eingegangen 3. Juni 1931.

Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I.

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

In einer früheren Note (5) zeigte ich, daß die Zahl e und eine beliebige Liouville-Zahl stets algebraisch unabhängig sind. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen weitergeführt und folgende zwei Sätze bewiesen:

Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ irgend N algebraische Zahlen, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, bedeutet ferner λ eine beliebige Liouville-Zahl, so sind die Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \ldots, e^{\vartheta_N}, \lambda$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen.

Bedeutet z den reellen Logarithmus einer positiven rationalen und von Eins verschiedenen Zahl oder ist $z = \pi$, bedeutet ferner λ eine beliebige Liouville-Zahl, so sind die beiden Zahlen

$$z, \lambda$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen.

Der Beweis dieser Sätze beruht auf einer Einteilung aller transzendenten Zahlen in drei Klassen nach ihrer Fähigkeit, sich durch algebraische Zahlen mehr oder weniger gut annähern zu lassen. Zwei Zahlen, die algebraisch von einander abhängen, gehören immer zur gleichen Klasse; also sind zwei Zahlen in verschiedenen Klassen gewiß algebraisch unabhängig. Diese Klasseneinteilung ist kurz in Kapitel Eins dargestellt.

Um dieselbe aber anwenden zu können, müssen schärfere Sätze abgeleitet werden über die Approximation der Werte der Exponentialfunktion und des Logarithmus in algebraischen Punkten durch algebraische Zahlen. Dazu wird von den entsprechenden algebraischen Fragen ausgegangen. Sind $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_m$ voneinander verschiedene beliebige Zahlen, $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ beliebige natürliche Zahlen, so gibt es ein und nur ein System von Polynomen

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

bzw. vom Grad $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \ldots, \varrho_m - 1$, so daß die Potenzreihe

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$$

genau mit dem Anfangsglied

$$\frac{z^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m-1}}{(\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m-1)!}$$

beginnt. Die Funktionen $A_k(z)$ und $R(z)$ lassen sich explizit durch Differentialausdrücke, vielfache reelle Integrale und einfache Cauchysche Integrale darstellen; es handelt sich bei ihnen um Ausartungen verallgemeinerter hypergeometrischer Funktionen. Wie ich neuerdings fand, finden sie sich bereits in einem Brief von Hermite an Pincherle (2) vor, jedoch ohne arithmetische Anwendungen. Diese Funktionen haben eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften; wird z. B. gesetzt

$$A_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_h \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_h + 1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \qquad (h, k = 1, 2, \dots, m),$$

so ist die Determinante

$$\left| A_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \right| = c\, z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m} \qquad \left(\frac{dc}{dz} = 0,\ c \neq 0\right),$$

also nur im Nullpunkt gleich Null. Dieselben Funktionen stehen ferner, wie gezeigt wird, in einer merkwürdigen Beziehung zu den Polynomen, die Hermite bei seinem klassischen Transzendenzbeweis für e in der Arbeit (1) benutzt.

Die rein algebraischen Näherungen für die Exponentialfunktion

$$R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k \left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) e^{\omega_k z}$$

gehen in arithmetische über, wenn die Parameter gleich Zahlwerten gesetzt werden.

Zunächst sei m fest, während die Zahlen ϱ_k bis um eine Einheit den gleichen über alle Grenzen wachsenden Wert haben und $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ je gleich verschiedenen algebraischen Zahlen sind und $z = 1$. Nach einem Verfahren von Siegel (7) läßt sich aus den dann entstehenden numerischen Näherungen folgender Satz folgern:

Sind die N algebraischen Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen und gemeinsam in einem Zahlkörper vom Grad n gelegen, so gibt es eine positive Konstante $T_{N,n}$, die nur von N und n abhängt, so daß der Wert des Ausdruckes

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1} \cdots \sum_{\lambda_N=0}^{M_N} \mathfrak{a}_{\lambda_1 \cdots \lambda_N} e^{\lambda_1 \vartheta_1 + \cdots + \lambda_N \vartheta_N}, \qquad a = \max_{\substack{\lambda_1 = 0,1,\dots,M_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0,1,\dots,M_N}} (|\mathfrak{a}_{\lambda_1 \cdots \lambda_N}|) > 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten für genügend großes a der Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-T_{N,n} M_1 \cdots M_N}$$

genügt.

Hieraus läßt sich speziell die Aussage über Beziehungen zu Liouville-Zahlen herleiten. Im Fall $N = n = 1$ kann man noch genauere untere Schranken erhalten. Man kommt zu dem weiteren Ergebnis:

Die Koeffizienten der linearen Form in $1, e, \dots, e^m$,

$$r = \sum_{k=0}^{m} a_k e^k, \qquad a = \max_{k=0,1,\dots,m} (|a_k|) > 0$$

seien ganz rational. Dann gibt es eine positive Zahl c, die weder von m, noch von den Koeffizienten a_k abhängt, so daß für genügend großes a die folgende Ungleichung besteht:

$$|r| \geqq a^{-m - \frac{cm^2 \log(m+1)}{\log \log a}}.$$

Dies Ergebnis ist eine geringe Verschärfung der bisher schärfsten Resultate von Siegel (7) und Popken (5) über die Annäherung an e.

Auf ähnliche Art kommt man zu Aussagen über die Annäherung an Logarithmen und insbesondere an die Zahl $2\pi i = \log 1$. Dazu wird in

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k \left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z}$$

$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ festgehalten und m über alle Grenzen wachsen gelassen, während $\omega_k = k - 1$ ist und z gleich dem betreffenden Logarithmus. Dann ergibt sich die Existenz von unendlichvielen Annäherungen an z durch angebbare algebraische Zahlen vom Grad $\varrho - 1$, aus der die Angabe über Beziehungen zu Liouvilleschen Zahlen hergeleitet werden kann. Es läßt sich noch folgender Satz beweisen:

Es gibt eine absolute Konstante $c > 1$, so daß für eine beliebige natürliche Zahl m und $m + 1$ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_m$ mit

$$a = \max_{k=0,1,\dots,m} (|a_k|) \geqq a(m)$$

die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k \pi^k\right| \geqq a^{-c^m}$$

besteht.

Die Untersuchungen dieser Arbeit können auf die Binomialreihe übertragen werden; man erhält so für den Spezialfall der Wurzeln reiner Gleichungen einen neuen Beweis des Thue-Siegelschen Satzes.*) —

Herrn Prof. Siegel möchte ich an dieser Stelle danken für eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen; er hatte die Güte, mich auf einige Irrtümer aufmerksam zu machen. Mein besonderer Dank gilt ferner der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für ihre Unterstützung.

Literaturverzeichnis.

(1) Ch. Hermite, Sur la fonction exponentielle, Œuvres III, S. 150.
(2) Ch. Hermite, Sur la généralisation des fractions continues algébriques, Œuvres IV, S. 357.
(3) Laplace, Théorie analytique des probabilités, Œuvres VII, S. 111.
(4) Liouville, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, C. R. **18** (1844), S. 883 u. 910.
(5) K. Mahler, Über Beziehungen zwischen der Zahl e und den Liouvilleschen Zahlen, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 729.
(6) J. Popken, Zur Transzendenz von e, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 525.
Zur Transzendenz von π, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 542.
(7) C. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1929, Nr. 1.
Außerdem sind die Arbeiten von Morduchai-Boltowskoj zu nennen, die mir aber ihrer Sprache wegen nicht zugängig waren.

I.

1. Bei Untersuchungen über transzendente Zahlen kann man oft von einer Klasseneinteilung der Zahlen nach ihrer Annäherungsschärfe Gebrauch machen, die hier kurz dargestellt ist.

Es bedeute z eine reelle oder nichtreelle Zahl, m und a zwei natürliche Zahlen. Die arithmetische Funktion

$$\omega_m(a \mid z) = \omega_m(a) = \min_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_m = 0, \mp 1, \dots, \mp a \\ \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \neq 0}} \left(\left| \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right| \right)$$

*) Dieser Beweis ist inzwischen erschienen in der Arbeit: „Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes für binomische Gleichungen", Math. Annalen **105** (1931), S. 267.

ist höchstens gleich Eins und nimmt nicht zu, wenn m und a wachsen. Jeder der oberen Grenzwerte

$$\omega_m(z) = \omega_m = \overline{\lim_{a \to +\infty}} \frac{\log \frac{1}{\omega_m(a)}}{\log a}, \qquad \omega(z) = \omega = \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{\omega_m}{m}$$

ist entweder positiv unendlich groß oder eine endliche nichtnegative Zahl. Mit ω_m ist für $m' \geqq m$ auch $\omega_{m'}$ unendlichgroß; demnach gibt es einen Index $\mu(z) = \mu$, so daß ω_m für $m < \mu$ endlich, für $m \geqq \mu$ unendlich ist. Die beiden Zahlen ω und μ sind nie gleichzeitig endlich.

Definition: Eine Zahl z heißt

A-Zahl, wenn $\omega = 0$, $\mu = +\infty$,
S-Zahl, wenn $0 < \omega < +\infty$, $\mu = +\infty$,
T-Zahl, wenn $\omega = +\infty$, $\mu = +\infty$,
U-Zahl, wenn $\omega = +\infty$, $\mu < +\infty$

ist. Jede Zahl gehört einer und nur einer von diesen vier Klassen an.

2. Der Sinn der Klasseneinteilung ergibt sich aus einigen einfachen und altbekannten Hilfssätzen, deren Beweis auf Liouville und Dirichlet zurückgeht. Man hat mit der Abkürzung $\sigma(z) = \sigma = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für reelles } z \\ 2 \text{ für nichtreelles } z \end{Bmatrix}$:

a) *Für eine algebraische Zahl z vom Grad n ist*

$$\frac{m+1}{\sigma} - 1 \leqq \omega_m \leqq \frac{n}{\sigma} - 1 \text{ für } m < n-1, \qquad \omega_m = \frac{n}{\sigma} - 1 \text{ für } m \geqq n-1;$$
$$\omega = 0, \quad \mu = +\infty;$$

b) *Für eine transzendente Zahl ist*

$$\omega_m \geqq \frac{m+1}{\sigma} - 1 \text{ für } m = 1, 2, 3, \ldots; \quad \omega \geqq \frac{1}{\sigma}.$$

Die Menge der A-Zahlen ist also identisch mit der Menge der algebraischen Zahlen, und man hat das Transzendenzkriterium:

Eine Zahl z ist dann und nur dann transzendent, wenn es zu jeder noch so großen Zahl $\Omega > 0$ eine natürliche Zahl m und unendlichviele Lösungen der Ungleichung

$$0 < \left| \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right| < a^{-\Omega}, \qquad a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|)$$

in ganzen rationalen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ gibt.

Weiter gilt folgender Satz [1]):

c) *Wenn zwischen den beiden transzendenten Zahlen z_1 und z_2 eine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die nicht alle verschwinden, von der Form*

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\mathfrak{a}_1} \sum_{\alpha_2=0}^{\mathfrak{a}_2} A_{\alpha_1 \alpha_2} z^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} = 0$$

besteht, so ist

$$\omega_m(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 - 1 + \mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_2}(z_2), \qquad \omega_m(z_2) \leqq \mathfrak{a}_2 - 1 + \mathfrak{a}_2 \omega_{m\mathfrak{a}_1}(z_1)$$
$$\omega(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \omega(z_2), \qquad \omega(z_2) \leqq \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \omega(z_1)$$
$$\mu(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 \mu(z_2), \qquad \mu(z_2) \leqq \mathfrak{a}_2 \mu(z_1).$$

Die Klasseneinteilung in A-Zahlen, S-Zahlen, T-Zahlen, U-Zahlen ist somit invariant bei dem Übergang von einer Zahl zu einer algebraisch abhängigen Zahl; zwei Zahlen in verschiedenen Klassen sind immer algebraisch unabhängig.

[1]) Siehe meine Note (5).

Offenbar sind die speziellen U-Zahlen mit $\mu = 1$ identisch mit den sogenannten Liouvilleschen Zahlen (4).

II.

3. Zu m natürlichen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ und m voneinander verschiedenen komplexen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ existieren nach bekannten Sätzen über homogene lineare Gleichungen m Polynome

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

höchstens der Grade $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \ldots, \varrho_m - 1$, die nicht alle gleichzeitig identisch verschwinden, so daß der Index h_0 des ersten nichtverschwindenden Koeffizienten a_{h_0} in der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$$

der Ungleichung

$$M = h_0 - \sum_{k=1}^{m} \varrho_k + 1 \geqq 0$$

genügt. Irgendeine der so bestimmten Summen werde bezeichnet mit

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z}$$

und m ihre Ordnung, M ihr Überschuß genannt.

Bedeuten D, D^{-1}, J die Operatoren

$$D = \frac{d}{dz}, \quad D^{-1} = \int \ldots dz, \quad J = \int_0^z \ldots dz,$$

so gelten folgende Rechenregeln:

$$D^{\mp\varrho} e^{\omega z} A(z) = e^{\omega z} A_{\mp\varrho}(z), \qquad A_{\mp\varrho}(z) = (\omega + D)^{\mp\varrho} A(z) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist $A(z) \not\equiv 0$ ein Polynom und $\omega \neq 0$, so sind die Polynome $A_{+\varrho}(z)$ und $A_{-\varrho}(z)$ auch nicht identisch Null und von genau gleichem Grad wie $A(z)$.

Gemäß der Definition von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right)$ sind die Polynome

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

nicht alle gleichzeitig identisch Null; es möge etwa $A_H\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) \not\equiv 0$ sein. Ist dann $h \neq H$, so wird

$$D^{\varrho_h} e^{-\omega_h z} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} A_k^*(z)\, e^{(\omega_k - \omega_h) z}$$

$$A_k^*(z) = (\omega_k - \omega_h + D)^{\varrho_h} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix}k = 1, 2, \ldots, m \\ k \neq h\end{matrix}\right),$$

wobei die Polynome $A_k^*(z)$ höchstens vom Grad $\varrho_k - 1$ sind und dasjenige mit dem Index H nicht identisch verschwindet. Die Potenzreihe von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right)$ begann aber mit der $(M + \sum_{k=1}^{m} \varrho_k - 1)$-ten Potenz von z, so daß die Potenzreihe der Funktion

$$D^{\varrho_h} e^{-\omega_h z} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

mit der $(M + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} \varrho_k - 1)$-ten Potenz von z anfängt; letztere muß daher nach der obigen Definition gleich einer Funktion

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 - \omega_h \dots \omega_{h-1} - \omega_h & \omega_{h+1} - \omega_h \dots \omega_m - \omega_h \\ \varrho_1 \quad \dots \quad \varrho_{h-1} & \varrho_{h+1} \quad \dots \quad \varrho_m\end{matrix}\right)$$

der Ordnung $m - 1$ und des Überschusses M sein. Von einer Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ der Ordnung m und mit positivem Überschuß kann man daher stets zu einer Funktion der gleichen Art von der Ordnung $m - 1$ und von ebenfalls positivem Überschuß absteigen. Dieses Verfahren kann wiederholt werden, so daß aus der Existenz einer Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ beliebiger Ordnung und von positivem Überschuß die Existenz einer ebensolchen Funktion der Ordnung 1 mit positivem Überschuß folgt; eine solche existiert aber gewiß nicht.

Damit ist gezeigt:

Der Koeffizient der $(\sum_{k=1}^{m} \varrho_k - 1)$*-ten Potenz in der Potenzreihe jeder Funktion* $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ *ist ungleich Null.*

Hieraus lassen sich eine Reihe von Folgerungen ziehen. Offenbar besteht erstens der Satz:

Satz 1. *Seien* $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ *komplexe Zahlen, die in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. Dann sind die Funktionen*

$$z, e^{\vartheta_1 z}, e^{\vartheta_2 z}, \dots, e^{\vartheta_N z}$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen.

Zweitens folgt, daß die Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ *eindeutig* bestimmt ist, wenn verlangt wird, daß ihre Potenzreihe genau mit dem Gliede

$$\frac{z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1}}{(\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1)!}$$

beginnt; diese Annahme werde von jetzt ab gemacht. Alsdann sind auch die Polynome $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ eindeutig bestimmt, und zwar sind sie drittens alle nicht identisch Null, sondern vielmehr genau von den Graden $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \dots, \varrho_m - 1$. Viertens folgt, daß die Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ in den Zahlpaaren

$$(\omega_1 \varrho_1), \quad (\omega_2 \varrho_2), \dots, (\omega_m \varrho_m)$$

symmetrisch ist.

4. Wegen der Eindeutigkeit und nach der Annahme über den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten in den zugehörigen Potenzreihen ist

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \\ \varrho_1\end{matrix}\right) = \frac{z^{\varrho_1 - 1}}{(\varrho_1 - 1)!} e^{\omega_1 z},$$

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \, \omega_2 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = e^{\omega_1 z} J^{\varrho_1} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_2 - \omega_1 \dots \omega_m - \omega_1 \\ \varrho_2 \quad \dots \quad \varrho_m\end{matrix}\right)$$

und folglich

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_m\\ \varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_m\end{matrix}\right) = (e^{\omega_1 z}J^{\varrho_1})\,(e^{(\omega_2-\omega_1)z}J^{\varrho_2})\ldots(e^{(\omega_{m-1}-\omega_{m-2})z}J^{\varrho_{m-1}})\,e^{(\omega_m-\omega_{m-1})z}\,\frac{z^{\varrho_m-1}}{(\varrho_m-1)!}$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_m\\ \varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_m\end{matrix}\right) =$$

$$= \int_0^z dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-2}} dt_{m-1} \left\{ \frac{(z-t_1)^{\varrho_1-1}\,(t_1-t_2)^{\varrho_2-1}\ldots(t_{m-2}-t_{m-1})^{\varrho_{m-1}-1}\,t_{m-1}^{\varrho_m-1}}{(\varrho_1-1)!\,(\varrho_2-1)!\ldots(\varrho_{m-1}-1)!\,(\varrho_m-1)!} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{\omega_1(z-t_1)+\omega_2(t_1-t_2)+\cdots+\omega_{m-1}(t_{m-2}-t_{m-1})+\omega_m t_{m-1}} \right\}.$$

Damit sind die Funktionen $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_m\\ \varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)$ explizit bestimmt.

5. Auch für die Polynome $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)$ kann eine explizite Formel angegeben werden, nämlich

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_m\\ \varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_m\end{matrix}\right) = \prod_{\substack{h=1\\ h\neq k}}^{m} (\omega_k-\omega_h+D)^{-\varrho_h}\,\frac{z^{\varrho_k-1}}{(\varrho_k-1)!} \quad (k=1,2,\ldots,m).$$

Denn für $m=1$ stimmt diese Formel; sie sei bereits für alle Polynome

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_2-\omega_1\ldots\omega_m-\omega_1\\ \varrho_2\quad\ldots\quad\varrho_m\end{matrix}\right)$$

mit $m-1$ Paaren $(\omega_k-\omega_1, \varrho_k)$ bewiesen. Wegen

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right) = e^{\omega_1 z}\,J^{\varrho_1}\,R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_2-\omega_1\ldots\omega_m-\omega_1\\ \varrho_2\quad\ldots\quad\varrho_m\end{matrix}\right),$$

$$D^{-\varrho}\,e^{\omega z}\,A(z) = e^{\omega z}\cdot(\omega+D)^{-\varrho}\,A(z)$$

gilt sie dann auch für die Polynome $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)$ mit von 1 verschiedenem Index k; das Polynom $A_1\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)$, welches auf diese Art noch nicht bestimmt ist, muß dann nach der bewiesenen Symmetrie von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)$ in den Zahlpaaren (ω_k, ϱ_k) gleichfalls die behauptete Form haben.

Der Differentialausdruck für $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)$ läßt sich in ein Cauchysches Integral überführen. Ist als Potenzreihe geschrieben

$$\prod_{\substack{h=1\\ h\neq k}}^{m} (\omega_k-\omega_h+D)^{-\varrho_h} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l^{(k)}\,D^l,$$

so wird nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$c_l^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \prod_{\substack{h=1\\ h\neq k}}^{m} (\omega_k-\omega_h+\zeta)^{-\varrho_h}\,\frac{d\zeta}{\zeta^{l+1}},$$

wobei über einen genügend kleinen Kreis C_0 um den Nullpunkt in positiver Richtung integriert wird. Wegen

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho_k-1} c_l^{(k)}\,\frac{z^{\varrho_k-l-1}}{(\varrho_k-l-1)!}$$

ist daher

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{e^{z\zeta} - \sum_{l=\varrho_k}^{\infty} \frac{(z\zeta)^l}{l!}}{\prod_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + \zeta)^{-\varrho_h}\, \zeta^{\varrho_k}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}\, d\zeta}{\prod_{h=1}^{m} (\omega_k - \omega_h + \zeta)^{\varrho_h}},$$

da die Funktion

$$\prod_{h=1}^{m} (\omega_k - \omega_h + \zeta)^{-\varrho_h} \sum_{l=\varrho_k}^{\infty} \frac{(z\zeta)^l}{l!}$$

im Nullpunkt regulär ist. Bedeutet C_k einen genügend kleinen Kreis mit positivem Richtungssinn um den Punkt ω_k, C_∞ einen genügend großen um den Nullpunkt mit positivem Richtungssinn, so wird folglich [2]):

$$e^{\omega_k z} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{e^{z\zeta}\, d\zeta}{\prod_{h=1}^{m} (\zeta - \omega_h)^{\varrho_h}},$$

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty} \frac{e^{z\zeta}\, d\zeta}{\prod_{h=1}^{m} (\zeta - \omega_h)^{\varrho_h}}.$$

Dem letzten Integral entnimmt man die Differentialgleichung

$$\prod_{h=1}^{m} (D - \omega_h)^{\varrho_h}\, R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = 0,$$

und zwar ist $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ die einzige Lösung dieser Differentialgleichung, die im Nullpunkt eine Potenzreihe mit dem Anfangsglied

$$\frac{z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1}}{(\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1)!}$$

besitzt.

6. Wenn h und k Zahlen der Folge 1, 2, . . ., m sind und wie üblich

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{für } h = k \\ 0 & \text{für } h \neq k \end{cases}$$

ist, so werde gesetzt:

$$R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \dots & \omega_m \\ \varrho_1 + \delta_{h1} \dots \varrho_m + \delta_{hm}\end{matrix}\right),$$

$$A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 & \dots & \omega_m \\ \varrho_1 + \delta_{h1} \dots \varrho_m + \delta_{hm}\end{matrix}\right).$$

Die quadratische Matrix

$$A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \left(A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)\right) \qquad (h, k = 1, 2, \dots, m)$$

besitze die Determinante

$$D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right),$$

---

[2]) Diese Formeln stehen bereits bei Hermite (2).

und durch Fortfall der h-ten Zeile und k-ten Spalte entstehe aus ihr die Unterdeterminante

$$D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Offenbar ist $A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom in z vom Grad $\varrho_k + \delta_{hk} - 1$; der Koeffizient der höchsten Potenz von z ergibt sich aus der Darstellung als Differentialausdruck zu

$$\frac{1}{(\varrho_k + \delta_{hk} - 1)!} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_l - \delta_{hl}}.$$

Die Determinante $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ist folglich ein Polynom in z vom Grad $\varrho_1 + \dots + \varrho_m$ mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz gleich

$$\frac{1}{\varrho_1!\, \varrho_2! \dots \varrho_m!} \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_l}.$$

Aus den linearen Gleichungen in den Größen $e^{\omega_1 z}, e^{\omega_2 z}, \dots, e^{\omega_m z}$

$$\sum_{k=1}^{m} A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (h = 1, 2, \dots, m)$$

folgt andrerseits durch Auflösung nach $e^{\omega_k z}$ die Identität:

$$D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h+k} D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Also ist $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ durch die Potenz $z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m}$ teilbar, daher

$$D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \frac{z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m}}{\varrho_1!\, \varrho_2! \dots \varrho_m!} \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_k}.$$

Wenn z nicht verschwindet, so ist demnach $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ nie gleich Null.

7. Die Matrix $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ besitzt als Funktion ihrer Argumente eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften. Werden z. B. die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ gleichzeitig um Eins vermehrt, so multipliziert sie sich nur mit einer Matrix, deren Elemente rationale Funktionen in z von beschränktem Grade sind. Mittels einiger Formeln von Hermite gelingt es, wie wir zeigen wollen, auch die zu $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ reziproke Matrix zu bestimmen.

Es sei

$$F_h(\zeta) = \prod_{l=1}^{m} (\zeta - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} \qquad (h = 1, 2, \dots, m)$$

und

$$\mathfrak{F}_h(z \,|\, \zeta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{-\lambda-1} \frac{d^\lambda F_h(\zeta)}{d\zeta^\lambda} \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

so daß identisch

$$\int F_h(\zeta)\, e^{-z\zeta}\, d\zeta = -\mathfrak{F}_h(z \,|\, \zeta)\, e^{-z\zeta}$$

ist. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}\,\mathfrak{F}_h(z\,|\,\omega_k) = \mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right),$$

$$z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}\,e^{(\omega_k+\omega_l)z}\int_{\omega_k}^{\omega_l} F_h(\zeta)\,e^{-z\zeta}\,d\zeta = R_{h,kl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right). \qquad (h, k, l = 1, 2, \dots, m)$$

Dann besteht die Identität

$$\mathfrak{A}_{hl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} - \mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_l z} = R_{h,kl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \quad (h,k,l=1,2,\dots,m).$$

Die Funktion $R_{h,kl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ besitzt in der Umgebung des Nullpunktes eine Potenzreihe, die erst mit der $(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m)$-ten Potenz von z beginnt. Die Funktionen $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ sind Polynome in z genau vom Grad $(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m) + \delta_{hk} - \varrho_k - 1$. Der Koeffizient der höchsten Potenz von z in $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ergibt sich leicht aus der Definition zu

$$(\varrho_k - \delta_{hk})! \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}}.$$

Mit $\mathfrak{A}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ werde weiter die quadratische Matrix

$$\mathfrak{A}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \left(\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)\right),$$

mit $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ihre Determinante bezeichnet.

8. Offenbar ist $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom in z genau vom Grad

$$(m-1)(\varrho_1 + \cdots + \varrho_m).$$

Da die Glieder in der Diagonale dieser Determinante jeweils von höherem Grade als die anderen Glieder in der gleichen Spalte sind, so ist folglich der Koeffizient der höchsten Potenz von z gleich

$$(\varrho_1 - 1)!\,(\varrho_2 - 1)! \dots (\varrho_m - 1)! \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{\varrho_l},$$

d. h. gleich dem Produkt der entsprechenden Koeffizienten für die Diagonalglieder.

In der Determinante $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ werde jetzt für $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ der Wert

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = e^{(\omega_k-\omega_1)z}\,\mathfrak{A}_{h1}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) + e^{-\omega_1 z}\,R_{h,1k}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

eingesetzt und alsdann für $k = 2, 3, \dots m$ von der k-ten Spalte die erste multipliziert mit $e^{(\omega_k-\omega_1)z}$ subtrahiert. Die Glieder in diesen Zeilen gehen dann alle über in Potenzreihen, die erst mit der Potenz $z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}$ beginnen. Also ist $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ durch $z^{(m-1)(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)}$ teilbar und die Formel von Hermite

$$\mathfrak{D}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = (\varrho_1 - 1)!\,(\varrho_2 - 1)! \dots (\varrho_m - 1)! \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{\varrho_l} \quad z^{(m-1)(\varrho_1 + \dots + \varrho_m)}$$

bewiesen [3]).

9. Die vorige Identität ergibt sich auch aus einer Beziehung, die zwischen den beiden Matrizen $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ und $\mathfrak{A}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ besteht. Es ist

$$\sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_l z} = R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

$$\mathfrak{A}_{k1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_l z} - \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_1 z} = R_{k,l1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \quad (k, l = 1, 2, \dots, m)$$

und also

$$e^{\omega_1 z} \sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) =$$

$$= \mathfrak{A}_{k1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) - \sum_{l=1}^{m} A_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) R_{k,l1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Auf der rechten Seite dieser Identität stehen lauter Potenzreihen, die erst mit der $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m)$-ten Potenz von z beginnen. Die Ausdrücke links

$$\sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

sind als Polynome also durch diese Potenz von z teilbar. Andrerseits ist das Polynom $A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ vom Grad $\varrho_l + \delta_{hl} - 1$, das Polynom $\mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ vom Grad $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m) + \delta_{kl} - \varrho_l - 1$. Folglich ist $E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom vom Grad $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m) - 1$ für $h \neq k$ und vom Grad $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m)$ für $h = k$. Im ersten Fall ist es demnach identisch Null, im zweiten Fall aber identisch gleich einer Konstanten mal $z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m}$. Indem wir Gebrauch machen von den Koeffizienten der höchsten Potenzen von z in den Polynomen $A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ und $\mathfrak{A}_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$, die früher bestimmt wurden, gelangen wir also zu den Formeln:

$$E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho_h} z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m} & \text{für } h = k, \\ 0 & \text{für } h \neq k. \end{cases}$$

Diese m^2 Gleichungen lassen sich in die eine Matrizengleichung

$$A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}'\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m} \mathsf{P}(\varrho_1 \dots \varrho_m)$$

zusammenfassen; dabei bedeutet der Akzent die transponierte Matrix und $\mathsf{P}(\varrho_1 \dots \varrho_m)$ *die Diagonalmatrix*

---

[3]) Vgl. hierzu und zu den vorigen Formeln die Arbeit (1) von Hermite. Der Hermitesche Beweis benutzt die Zerlegung der Matrix $\mathfrak{A}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ in einfachere Faktoren.

$$\mathsf{P}(\varrho_1 \dots \varrho_m) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\varrho_m} \end{pmatrix}.$$

Durch Übergang zu den Determinanten folgt wieder die Hermitesche Identität; ferner ergibt sich, daß die Unterdeterminanten $D_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ von $A\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ bis auf von z unabhängige Faktoren gerade gleich den Polynomen $\mathfrak{A}_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ sind.

Die vorige Matrizengleichung läßt sich als Verallgemeinerung einer bekannten Gammabeziehung auffassen. Man zeigt leicht, daß für $R(z) > 0$

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m} \int_0^\infty \prod_{l=1}^{m} (\zeta + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} e^{-z\zeta}\, dz$$

ist, wo über die positiv reelle Achse integriert wird. Also ist nach oben:

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}\, d\zeta}{\prod_{l=1}^{m} (\zeta + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l + \delta_{hl}}} \right)_{hk} \cdot \left(\int_0^\infty \prod_{l=1}^{m} (\zeta + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} e^{-z\zeta}\, d\zeta \right)'_{hk} = \mathsf{P}(\varrho_1 \dots \varrho_m),$$

und diese Matrizengleichung enthält im Fall $m = 1$ die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{\varrho+1}}\, d\zeta \cdot \int_0^\infty \zeta^{\varrho-1} e^{-z\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{\varrho},$$

die ein Spezialfall der Funktionalgleichung

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

der Gammafunktion ist.

III.

10. Die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ mögen alle in einem algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ n-ten Grades liegen. Es sei $\varrho_1 = \varrho_2 = \dots = \varrho_m = \varrho$ eine über alle Grenzen wachsende natürliche Zahl; mit $c_1, c_2, \dots$ werden positive Konstanten bezeichnet, die von ϱ nicht abhängen.

Den Integralformeln in 4. entnimmt man die Ungleichung

$$R_h\left(1 \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = O\left(\frac{c_1^\varrho}{\varrho!^m}\right), \qquad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Weiter ist nach der Differentialformel in 5.

$$A_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \left\{ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} \left(\sum_{\lambda_l=0}^{\infty} \binom{-\varrho-\delta_{hl}}{\lambda_l} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho-\delta_{hl}-\lambda_l} D^{\lambda_l} \right) \right\} \frac{z^{\varrho+\delta_{hk}-1}}{(\varrho+\delta_{hk}-1)!},$$

wobei die Summen nur bis zum Index ϱ erstreckt werden brauchen. Sei

$$\Omega = \prod_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^{m} (\omega_k - \omega_h).$$

Der Ausdruck

$$a_{hk}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} = \Omega^{2\varrho+1}\varrho!\, A_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

ist alsdann ein Polynom in den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ vom Grad $\frac{m(m-1)(2\varrho+1)}{2}$, dessen Koeffizienten ganze rationale Zahlen von der Größenordnung $O(c_2^\varrho\, \varrho!)$ sind.

Durch die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} a_{hk}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} e^{\omega_k} = r_h\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} \qquad (h = 1, 2, \dots, m)$$

mit

$$r_h\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} = \Omega^{2\varrho+1}\varrho!\, R_h\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = O\left(\frac{c_3^\varrho}{\varrho!^{m-1}}\right)$$

sind m linear unabhängige Formen in den Zahlen e^{ω_k} gegeben. Seien

$$\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{a}_{hk}\, e^{\omega_k} = \mathfrak{r}_h \qquad (h = 1, 2, \dots, \mu; \quad \mu < m)$$

μ unabhängige Linearformen in den e^{ω_k} mit ganzen rationalen Koeffizienten, für die

$$\max_{\substack{h=1,2,\dots,\mu\\ k=1,2,\dots,m}} (|\mathfrak{a}_{hk}|) = a, \qquad \max_{h=1,2,\dots,\mu} (|\mathfrak{r}_h|) = r$$

ist. Alsdann sind die μ Formen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_\mu$ zusammen mit gewissen $m-\mu$ der Formen $r_h\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}$, etwa den Formen

$$r_{h_1}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}, \quad r_{h_2}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}, \dots, r_{h_{m-\mu}}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}$$

linear unabhängig. Die Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{h_1 1}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} & \dots & a_{h_1 m}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{h_{m-\mu} 1}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} & \dots & a_{h_{m-\mu} m}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}\\ \mathfrak{a}_{11} & \dots & \mathfrak{a}_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathfrak{a}_{\mu 1} & \dots & \mathfrak{a}_{\mu m}\end{vmatrix}$$

ist also von Null verschieden; sie ist offenbar ein Polynom in den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ vom Grad $\frac{m(m-1)(m-\mu)(2\varrho+1)}{2}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten von der Größenordnung $O(c_4^\varrho\, \varrho!^{m-\mu}\, a^\mu)$; demnach ist nach bekannten Sätzen

$$\frac{1}{\delta} = O(c_5^\varrho\, \varrho!^{(m-\mu)(n-1)}\, a^{(n-1)\mu}).$$

Sei die Unterdeterminante von δ zur l-ten Zeile und k-ten Spalte mit δ_{lk}^* bezeichnet; dann ist offenbar

$$\delta_{lk}^* = O(c_6^\varrho\, \varrho!^{m-\mu-1}\, a^\mu), \quad \delta_{lk}^*\, r_{h_l}\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix} = O(c_8^\varrho\, \varrho!^{-\mu}\, a^\mu) \qquad \text{für } 1 \leqq l \leqq m-\mu,$$

$$\delta_{lk}^* = O(c_7^\varrho\, \varrho!^{m-\mu}\, a^{\mu-1}), \quad \delta_{lk}^*\, \mathfrak{r}_{l-m+\mu} = O(c_9^\varrho\, \varrho!^{m-\mu}\, a^{\mu-1} r) \text{ für } m-\mu+1 \leqq l \leqq m,$$

und wegen der Identität

$$\delta c^{\omega k} = \sum_{l=1}^{m-\mu} (-1)^{l+k}\, \delta_{lk}^{*}\, r_{hl}\begin{pmatrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{pmatrix} + \sum_{l=m-\mu+1}^{m} (-1)^{l+k}\, \delta_{lk}^{*}\, \mathfrak{r}_{l-m+\mu}$$

wird

$$1 = O(c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}) + O(c_{11}^{\varrho}\, \varrho!^{(m-\mu)n}\, a^{\mu n-1}\, r)$$

oder

$$c_{11}^{\varrho}\, \varrho!^{(m-\mu)n}\, a^{\mu n-1}\, r \geqq c_{12} - c_{13}\, c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}.$$

Wir machen jetzt die Annahme

$$\mu n > m(n-1) \qquad \text{d. h.} \quad \mu > m\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

ist a genügend groß, so gibt es dann immer eine größte Zahl ϱ, so daß

$$\frac{c_{12}}{2} \geqq c_{13}\, c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}$$

wird; daraus ergibt sich die asymptotische Gleichung

$$\log \varrho! \sim \frac{\mu n}{\mu n - m(n-1)} \log a$$

und folglich

$$r \geqq a^{-\tau-\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{für} \quad a \geqq a_0(\varepsilon)$$

mit dem Exponenten [4])

$$\tau = \mu n - 1 + \frac{(m-\mu)\mu n^2}{\mu n - m(n-1)} = \frac{m\mu n}{\mu n - m(n-1)} - 1.$$

11. Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ N algebraische Zahlen im Zahlkörper $\mathfrak{K}$ n-ten Grades, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, $M_1, M_2, \dots, M_N$ und $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ je N natürliche Zahlen; die Koeffizienten des Ausdrucks

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1} \dots \sum_{\lambda_N=0}^{M_N} \mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}\, e^{\lambda_1\vartheta_1 + \dots + \lambda_N\vartheta_N}; \quad a = \max_{\substack{\lambda_1=0,1,\dots,M_1 \\ \vdots \\ \lambda_N=0,1,\dots,M_N}} (|\mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}|) > 0$$

seien ganz rational. Die Linearformen

$$\mathfrak{r}_{\lambda_1 \dots \lambda_N} = e^{\lambda_1\vartheta_1 + \dots + \lambda_N\vartheta_N}\, \mathfrak{r} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0, 1, \dots, \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0, 1, \dots, \mu_N \end{pmatrix}$$

von der Anzahl

$$\mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) \dots (\mu_N + 1)$$

in den Ausdrücken

$$e^{\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_N}}, \quad \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_N} = \lambda_1\vartheta_1 + \dots + \lambda_N\vartheta_N \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0, 1, \dots, M_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0, 1, \dots, M_N + \mu_N \end{pmatrix}$$

der Anzahl

$$m = (M_1 + \mu_1 + 1)(M_2 + \mu_2 + 1) \dots (M_N + \mu_N + 1)$$

---

[4]) Siehe wegen des Beweisverfahrens in 10. die Arbeit von Siegel (7).

sind offenbar linear unabhängig, und jeder der Quotienten

$$\left|\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}}\right|$$

liegt zwischen positiven endlichen Schranken, die von den Zahlen $\mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}$ nicht abhängen. Für $\varepsilon > 0$ und $a \geqq a(\varepsilon)$ besteht also die Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-\tau-\varepsilon}$$

mit

$$\tau = \frac{n(M_1+\mu_1+1)\dots(M_N+\mu_N+1)\,(\mu_1+1)\dots(\mu_N+1)}{n(\mu_1+1)\dots(\mu_N+1) - (n-1)\,(M_1+\mu_1+1)\dots(M_N+\mu_N+1)} - 1,$$

wenn

$$n(\mu_1+1)\dots(\mu_N+1) - (n-1)\,(M_1+\mu_1+1)\dots(M_N+\mu_N+1) > 0$$

ist. Diese Ungleichung kann durch die Annahmen

$$\mu_l = \left[\frac{M_l}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{1/N} - 1}\right]$$

erfüllt werden, denn dann ist

$$1 + \frac{M_l}{\mu_l+1} \leqq \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\frac{1}{N}},$$

also

$$1 - \frac{n-1}{n}\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right) \geqq 1 - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n}{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$$

und

$$\frac{\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right)}{1-\frac{n-1}{n}\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right)} \leqq 2n,$$

so daß

$$\tau \leqq 2n\,(\mu_1+1)\dots(\mu_N+1) - 1 \leqq 2n\prod_{l=1}^{N}\left(\left[\frac{M_l}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{1/N}-1}\right]+1\right) - 1$$

wird. Für $N = 1$ kann die eckige Klammer fortgelassen werden, so daß dann

$$\tau \leqq 2n(2n-1)\,M_1 + (2n-1)$$

ist. Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ N algebraische Zahlen eines Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ n-ten Grades, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen. Sind dann $M_1, M_2, \dots, M_N$ irgend N natürliche Zahlen und die Koeffizienten der Linearform*

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1} \dots \sum_{\lambda_N=0}^{M_N} \mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}\, e^{\lambda_1\vartheta_1 + \dots + \lambda_N\vartheta_N}, \quad a = \max_{\substack{\lambda_1 = 0,1,\dots,M_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0,1,\dots,M_N}} (|\mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}|)$$

in den Zahlen

$$e^{\lambda_1\vartheta_1 + \dots + \lambda_N\vartheta_N}$$

ganz rational, so besteht für genügend großes a die Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-T_{N,n} M_1 \dots M_N}$$

mit einer positiven Zahl $T_{N,n}$, die allein von n und N abhängt. Die Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \dots, e^{\vartheta_N}$$

sind also algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen. Für $N = 1$ ist speziell, unter Beachtung der früheren Definition

$$\omega_m(e^{\vartheta_1}) \leqq 2n(2n-1)\, m + (2n-1), \qquad \omega(e^{\vartheta_1}) \leqq 2n(2n-1),$$

also e^{ϑ_1} eine S-Zahl. Allgemeiner folgt leicht aus den eben gezeigten unteren Abschätzungen für $\mathfrak{r}$, daß jede von den Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \dots, e^{\vartheta_N}$$

algebraisch abhängige Zahl entweder eine A-Zahl oder eine S-Zahl oder eine T-Zahl ist. *Unter U eine beliebige U-Zahl, z. B. eine Liouvillesche Zahl λ verstanden, sind also die Zahlen*

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \dots, e^{\vartheta_N}, U$$

stets algebraisch unabhängig.

12. Das letzte Ergebnis enthält die Aussage, daß die Zahl e eine S-Zahl ist. Bei Benutzung der Hermiteschen Formeln kann man zu einem schärferen Resultat gelangen.

Es werde wieder $\varrho_0 = \varrho_1 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ als große natürliche Zahl angenommen und dann

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \mathfrak{A}_{h+1,k+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0\,1 \dots m \\ \varrho\,\varrho \dots \varrho \end{matrix}\right),$$

$$R_{hkl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = R_{h+1,k+1,l+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0\,1 \dots m \\ \varrho\,\varrho \dots \varrho \end{matrix}\right)$$

gesetzt, so daß

$$\mathfrak{A}_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz} - \mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{lz} = R_{hkl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ist. Wegen

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{(m+1)\varrho-\lambda-1} \frac{d^\lambda F_h(\mathfrak{z})}{d\mathfrak{z}^\lambda}\bigg|_{\mathfrak{z}=k}, \qquad F_h(\mathfrak{z}) = \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} - l)^{\varrho-\delta_{hl}}$$

ist klar, daß die Polynome $\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ lauter ganze rationale Koeffizienten mit dem gemeinsamen Teiler

$$(\varrho - 1)!$$

besitzen. Die Zahlen $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ sind also gleichfalls durch $(\varrho - 1)!$ teilbar.

Es ist als Integral geschrieben:

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \int_0^\infty \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} + k - l)^{\varrho-\delta_{hl}}\, e^{-\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z},$$

$$R_{hkl}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = e^{k+l} \int_k^l \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z} - l)^{\varrho-\delta_{hl}}\, e^{-\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}.$$

Wenn ϱ über alle Grenzen wächst, so ergeben sich hieraus mittels der Methode von Laplace leicht asymptotische Formeln [1]).

[1]) Siehe (1), S. 157 und (3).

Im Integral für $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ wird das asymptotische Verhalten durch das Verhalten des Integranden bei $\vartheta \sim (m+1)\varrho$ bestimmt. Hier ist aber

$$\prod_{l=0}^{m} (\vartheta + k - l)^{\varrho-\delta_{hl}} = \vartheta^{(m+1)\varrho-1} \prod_{l=0}^{m} \left(1 + \frac{(k-l)\varrho}{\vartheta \cdot \varrho}\right)^{\varrho-\delta_{hl}} \sim \vartheta^{(m+1)\varrho-1}\, e^{\frac{\varrho}{\vartheta}\sum_{l=0}^{m}(k-l)} \sim \vartheta^{(m+1)\varrho-1}\, e^{k-\frac{m}{2}},$$

und durch einfache Abschätzungen zeigt man

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \sim e^{k-\frac{m}{2}}\, \Gamma((m+1)\varrho) \sim e^{k-\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{(m+1)\varrho}}\, (m+1)^{(m+1)\varrho}\, \varrho^{(m+1)\varrho}\, e^{-(m+1)\varrho}$$

und erst recht

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\, (m+1)^{(m+1)\varrho}\, \varrho^{(m+1)\varrho}\, e^{-(m+1)\varrho}\right).$$

Bedeute weiter ζ_λ die Wurzel der Gleichung

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\vartheta - l} = 0$$

im Intervall $(\lambda - 1, \lambda)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ und sei

$$\tau_\lambda = \prod_{l=0}^{m} (\zeta_\lambda - l), \qquad \sigma_\lambda = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{(\zeta_\lambda - l)^2}.$$

Das Integral

$$\int_{\lambda-1}^{\lambda} \prod_{l=0}^{m} (\vartheta - l)^{\varrho-\delta_{hl}}\, e^{-\vartheta}\, d\vartheta$$

wird für großes ϱ nach der Laplaceschen Methode asymptotisch gleich

$$\frac{e^{-\zeta_\lambda}}{\zeta_\lambda - h} \sqrt{\frac{2\pi}{\varrho\sigma_\lambda}}\, \tau_\lambda^{\varrho},$$

während sich die Funktionen $R_{hkl}\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ additiv aus mehreren dieser Integrale zusammensetzen. Sei

$$\tau = \max_{\lambda=1,2,\ldots,m} (|\tau_\lambda|).$$

Dann ist also

$$R_{hkl}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{\tau^{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Für großes m ist τ leicht abzuschätzen. Man hat

$$|\tau_\lambda| = (\lambda-\zeta)(\lambda-1-\zeta)\ldots(1-\zeta)\cdot\zeta(\zeta+1)\ldots(\zeta+m-\lambda) \leqq \lambda!\,(m-\lambda+1)! = \frac{(m+1)!}{\binom{m+1}{\lambda}},$$

und da $\binom{m+1}{\lambda}$ um so kleiner ist, je kleiner $|m+1-2\lambda|$, so ist

$$0 < \tau \leqq \frac{(m+1)!}{\binom{m+1}{1}} = m!.$$

Man hat also erst recht:

$$R_{hkl}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{m!^{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

13. Seien jetzt $a_0, a_1, \ldots a_m$ m ganze rationale Zahlen und das Maximum ihres absoluten Betrages

$$a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|)$$

von Null verschieden und sehr groß. In dem Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{m} a_k e^k = r$$

können die Werte e^k eliminiert werden mittels der Formeln

$$\mathfrak{A}_{h0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^k = \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + R_{hk0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, m),$$

so daß

$$\mathfrak{A}_{h0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) r = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + \sum_{k=0}^{m} a_k R_{hk0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \quad (h = 0, 1, \ldots, m)$$

ist. Die Determinante

$$\left| \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)_{h,k=0,1,\ldots,m} \right|$$

ist nach der Hermiteschen Formel von Null verschieden; die Linearformen

$$L_h = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \qquad (h = 0, 1, \ldots, m)$$

in $a_0, a_1, \ldots, a_m$ können also nicht gleichzeitig verschwinden. Sei etwa L_{h_0} von Null verschieden. Dieser Ausdruck ist dann eine durch $(\varrho - 1)!$ teilbare ganze rationale Zahl, da alle Koeffizienten $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ es sind; also wird

$$|L_{h_0}| \geqq (\varrho - 1)! \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\varrho}}\, \varrho^\varrho e^{-\varrho}.$$

Seien wieder $c_1, c_2, \ldots$ positive, wohl von m, nicht aber von a und ϱ abhängige Zahlen. Man hat nach den Formeln in 12.

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k R_{h_0 k0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \right| \leqq c_1 a \frac{m!^\varrho}{\sqrt{\varrho}}, \quad \left| \mathfrak{A}_{h_0 0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \right| \leqq \frac{c_2}{\sqrt{\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho}\, \varrho^{(m+1)\varrho}\, e^{-(m+1)\varrho},$$

also

$$\frac{c_2}{\sqrt{\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho}\, \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho} |r| \geqq \frac{c_3}{\sqrt{\varrho}} \varrho^\varrho e^{-\varrho} - c_1 a \frac{m!^\varrho}{\sqrt{\varrho}}$$

und

$$|r| \geqq \frac{c_3 \varrho^\varrho e^{-\varrho} - c_1 a\, m!^\varrho}{c_2 (m+1)^{(m+1)\varrho}\, \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho}}.$$

Jetzt werde ϱ gewählt als die größte natürliche Zahl, die der Ungleichung

$$c_3 (\varrho - 1)^{\varrho-1} e^{-(\varrho-1)} \leqq 2 c_1 a\, m!^{\varrho-1}$$

genügt. Dann ist gewiß

$$\varrho \log \varrho = \log a + \varrho \log (m!\, e) + O(\log \varrho)$$

und

$$\varrho \sim \frac{\log a}{\log \log a}.$$

Es wird also

$$\log|r| \geqq (\varrho \log \varrho - \varrho + O(1)) - \left\{(m+1)\,\varrho \log \varrho - (m+1)\,\varrho \log \frac{m+1}{e} + O(1)\right\}$$

oder

$$\log|r| \geqq -m \log a - \left\{m \log(m!\, e) - (m+1) \log \frac{m+1}{e} + 1\right\} \frac{\log a}{\log \log a}((1 + o(1)).$$

Also ist für $\varepsilon > 0$ und $a > a(\varepsilon)$

$$|r| \geqq a^{-m-\frac{\lambda+\varepsilon}{\log \log a}},$$

und zwar besitzt λ den Wert

$$\lambda = m \log(m!\, e) - (m+1) \log \frac{m+1}{e} + 1 = m^2 \log m + O(m^2).$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Die Koeffizienten der Linearform*

$$r = a_0 + a_1 e + \cdots + a_m e^m, \quad a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, (a_m|)$$

seien ganz rationale Zahlen, die nicht gleichzeitig verschwinden. Dann gibt es eine positive Zahl c, die weder von m, noch von den Koeffizienten der Form r abhängt, so daß für $a \geqq a(m)$ die Ungleichung

$$|r| \geqq a^{-m-\frac{cm^2 \log(m+1)}{\log \log a}}$$

besteht [1]).

Speziell ist also nach den Definitionen und Hilfssätzen in 1. und 2. die Gleichung

$$\omega(e) = 1$$

erfüllt, so daß die arithmetische Funktion ω für die reelle Zahl e den kleinsten überhaupt möglichen Wert Eins annimmt. Es ist allgemeiner auch

$$\omega(e^z) = 1,$$

wo z irgendeine rationale Zahl bedeutet. Dagegen gilt

$$\omega(ie^z) = \frac{1}{2},$$

so daß für nichtreelle Zahlen der Mindestwert 1/2 von ω ebenfalls erreicht wird.

[1]) Siehe die Arbeiten von Siegel (7), S. 31 und von Popken (6).

Eingegangen 5. Januar 1931.